Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботиз дисципліни

«Додаткові розділи елементарної математики»

для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»

Рекомендовано:
Вченою Радою факультету машинобудування
Протокол № 01-23/08 від «28» серпня 2023 р.

2023-2024 навчальний рік

Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

Укладач: (   ) Н. С. Грудкіна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Додаткові розділи елементарної математики»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено
на засіданні методичної ради
Протокол № 8   від 20.05.21

Краматорськ 2021

УДК 519.6
Г 37

Рецензент: Чумак О.О., канд. пед. наук, доцент кафедри Донбаської національної академії будівництва і архітектури, м. Краматорськ

Грудкіна Н.С.
Г 37 Додаткові розділи елементарної математики: Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи / Н.С. Грудкіна. – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 64 с.

Посібник з курсу «Додаткові розділи елементарної математики» містить стислий теоретичний матеріал та супроводжується прикладами розв'язання типових завдань, містить завдання для самостійного виконання студентами. Може використовуватись як викладачами, так і студентами для самостійної роботи.

УДК 519.6

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Додаткові розділи елементарної математики» повинен забезпечити формування фундаментальних понять математичного характеру, досягнення студентами високого рівня математичної підготовки, умінь застосування цих понять до розв'язання практичних задач та їх підготовка до професійної роботи, в тому числі з обдарованими учнями. Основне завдання курсу полягає у поглибленні знань студентів, отриманих при вивченні нормативного курсу елементарної математики, розширенні їх математичного кругозору з методів і прийомів розв’язування нестандартних задач, розвиненні логічного мислення та формуванні стійкого пізнавального математичного інтересу через інтеграцію навчання з дослідницькою діяльністю і творчістю.

Методичні вказівки мають за основну мету за курсом «Додаткові розділи елементарної математики» опанування студентами основних методів розв’язання геометричних задач та основами математичного моделювання засобами елементарної математики із застосуванням прикладних пакетів програм. Посібник містить стислі теоретичні відомості, контрольні запитання та завдання для самостійного опанування та індивідуальні розрахункові завдання на 30 варіантів за матеріалом курсу. Отримані навички від самостійної роботи стануть фундаментом застосування відповідних методів досліджень та аналізу отриманих результатів в практичній роботі.

Сподіваємось, що даний посібник допоможе студентам в оволодінні методами вивчення геометричних об’єктів, основними математичними підходами до розв’язку прикладних задач із використанням сучасних важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1.1 Класифікація геометричних задач

Як відомо, задачі в геометрії в залежності від умови і завдання ділять на чотири групи: завдання на обчислення, доведення, дослідження і на побудову.

У задачах на обчислення потрібно знайти невідомі величини (відрізки, кути, площі, об'єми) або їх співвідношення через відомі параметри. Якщо параметри дані в загальному вигляді, то результат виходить буквений, якщо ж умова містить числові значення параметрів, відповідь зводиться до числа. Іноді умова така, що потрібно спочатку розв'язати задачу в загальному вигляді, а потім підставити в отриманий вираз значення параметрів. Але інколи, незалежно від вимог умови, задачу доцільно розв'язати в загальному вигляді. Таким чином, розв'язування «буквено» і «в числах» не протиставляються одне одному, вони є лише двома формами подання невідомих величин через відомі.

У задачах на доведення необхідно встановити наявність певних співвідношень між елементами задачі: рівність чи нерівність відрізків, кутів, паралельність або перпендикулярність прямих, площини і т. д. Іноді завдання цього типу можуть бути оформлені і як завдання на обчислення; наприклад, довести, що деякий кут дорівнює 45°, що площа однієї фігури в стільки-то разів більше площі іншої фігури і т. п.

Менш поширені задачі на дослідження. У таких задачах результат заздалегідь не повідомляється. Потрібно з'ясувати чи лежить певна точка на даній прямій (на даній площині), чи перетинаються дані кола, чи паралельні дані прямі і т. п., визначити, який заданих відрізків більший, до якої з сторін трикутника знаходиться ближче дана точка, встановити залежність між перерахованими в умові елементами фігури.

У задачах на побудову невідомі величини визначаються в результаті виконання ряду геометричних побудов (за допомогою допустимих геометричних інструментів). Як правило, мова йде про побудову геометричної фігури за деякими даними про неї. У стереометрії нерідко замість відрізків і кутів дається зображення (наприклад, піраміди), на якому потрібно виконати побудову (наприклад, знайти перетин), тобто елементи фігури задаються їх положенням (на проекційному кресленні).

1.2 Задачі на побудову

1.2.1 Стислі теоретичні відомості

У шкільному курсі геометрії є досить велика кількість задач на побудову циркулем і лінійкою.

Розв'язання будь-якої задачі на побудову циркулем і лінійкою зводиться до скінченого числа основних побудов, які вивчаються ще у перших розділах курсу геометрії (побудова бісектриси кута, поділ відрізка пополам, побудова дотичної до кола і т.ін.).

Мета розв'язування задач на побудову — це побудова геометричних фігур із заданими властивостями за допомогою креслярських інструментів: циркуля й лінійки без вимірювальних поділок.

За допомогою лінійки можна провести:

- ✓ довільну пряму;
- ✓ пряму, що проходить через дану точку;
- ✓ пряму, що проходить через дві дані точки.

За допомогою циркуля можна:

- ✓ провести коло (частину кола) довільного або заданого радіуса з довільним або заданим центром;
- ✓ відкласти від початку даного променя відрізок заданої довжини.

Розв'язування задач на побудову складається з таких етапів:

1) аналіз задачі (пошук способу розв'язування задачі);

2) побудова (послідовне виконання основних побудов чи раніше розв'язаних задач, що дають можливість одержати шукану фігуру);

3) доведення (має на меті встановити, що побудована фігура дійсно задовольняє всім умовам задачі);

4) дослідження (скільки розв'язків має задача при кожному виборі заданих елементів).

Основними методами розв'язування задач на побудову є три таких:

а) метод перетину ГМТ;

б) метод геометричних перетворень;

в) алгебраїчний метод.

Геометричним місцем точок, що мають указану властивість, називається фігура, яка складається із тих і тільки тих точок, які мають цю властивість.

Суть методу перетину ГМТ полягає в тому, що задачу зводять до побудови однієї точки X (основного елемента побудови), яка задовольняє деяким двом незалежним умовам, що випливають із постановки задачі.

Основними ГМТ на площині, з якими зустрічаються в школі (рис. 1), є:

1) ГМТ, яке знаходиться на заданій відстані r від даної точки O, є коло з центром у точці O радіуса r: $\omega(O;r)$;

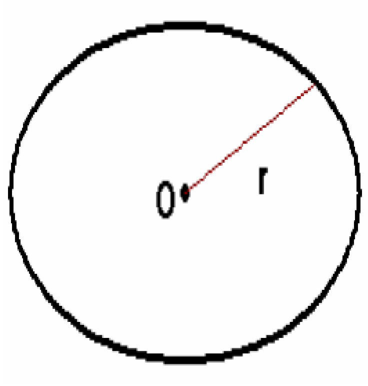
2) ГМТ, рівновіддалених від точок A і B, є серединний перпендикуляр до [AB];

3) ГМТ, віддалених від даної прямої AB на відстань r, є сукупність двох прямих, паралельних до даної, які знаходяться на відстані r від неї;

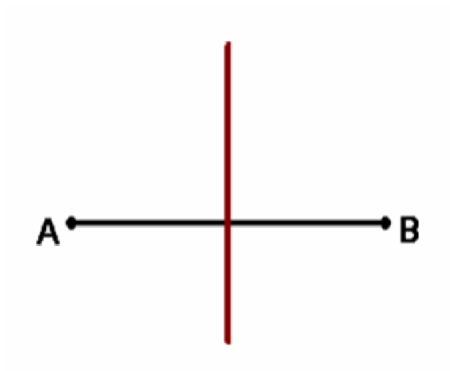
4) ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються, є сукупність двох перпендикулярних прямих – бісектрис кутів, утворених прямими;

5) ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих, є пряма, що до них паралельна та є їх віссю симетрії;

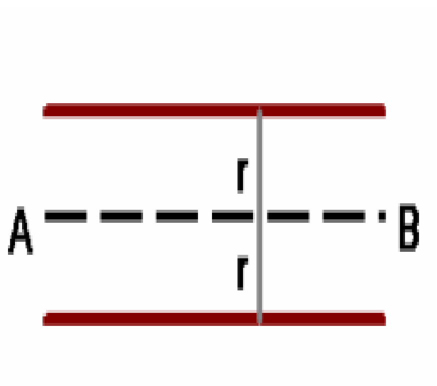
6) ГМТ, з яких даний відрізок AB видно під кутом 90^0, є коло, яке побудоване на $[AB]$ як на діаметрі, крім точок A і B.



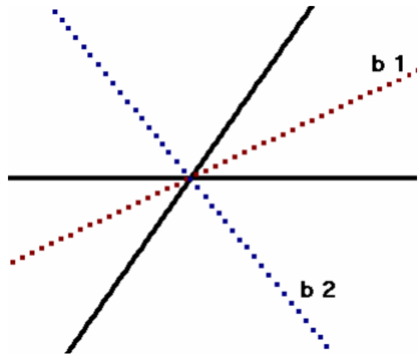
1)



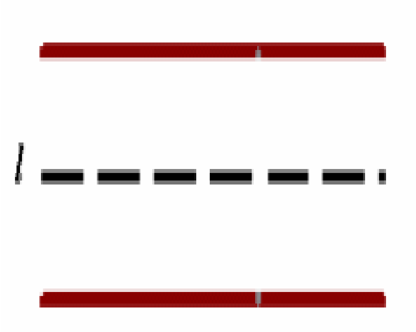
2)



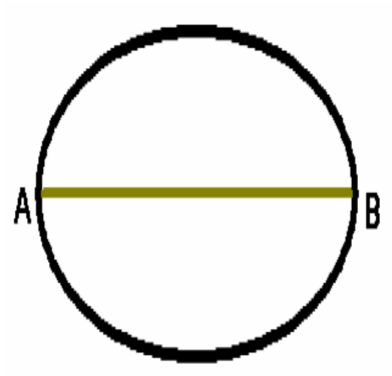
3)



4)



5)



6)

Рис.1. Основні ГМТ

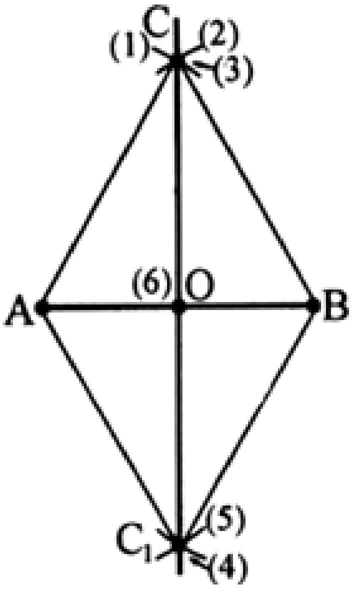
1.2.2 Приклади розв’язування задач на побудову

Задача 1. За допомогою циркуля та лінійки поділити відрізок навпіл.

Розв’язання.

Оформляємо стисло умову у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

Дано:	Побудова:	Доведення:
Відрізок АВ. Побудувати точку О так, щоб О∈АВ, АО=ОВ. 		Маємо: $\Delta AC_1C=\Delta BC_1C$ за трьома сторонами. Отже, $\angle ACO = \angle BCO$. Маємо: $\Delta ACO=\Delta BCO$ за двома сторонами та кутом між ними. Звідси маємо, АО=ОВ.

Будуємо:
1) коло (А; АВ);
2) коло (В; АВ);
3) коло (А; АВ) перетинає коло (В; АВ) у точках С та C_1;
4) відрізок CC_1;
5) відрізок CC_1 перетинає даний відрізок АВ у точці О;

Маємо, точка О – середина відрізка АВ.
Задача розв’язана.

Задача 2. За допомогою циркуля та лінійки побудувати кут, що дорівнює даному.

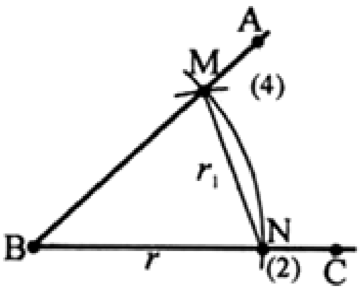
Розв’язання.

Оформляємо стисло умову у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2

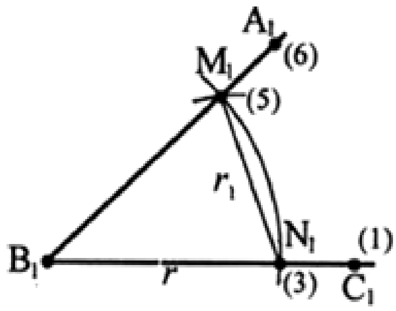
<table>
<tr><th>Дано:</th><th>Побудова:</th><th>Доведення:</th></tr>
<tr>
<td>

$\angle ABC$



Побудувати $\angle A_1B_1C_1$ так, щоб $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

</td>
<td>



</td>
<td>

Маємо:
$\Delta MBN = \Delta M_1N_1B_1$.
за трьома сторонами.
Отже,
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

</td>
</tr>
</table>

Будуємо:

1) півпряму B_1C_1;
2) коло з центром у вершині B довільного радіусу r . Коло (B; r) перетинає сторону BC даного кута у точці N, в сторону BA у точці M;
3) коло(B_1; r) перетинає півпряму B_1C_1 у точці N_1;
4) коло з центром у точці N радіусу MN $=r_1$;
5) коло(N_1; r_1) перетинає перетинає коло (B; r) у точці $M_1$4
6) проводимо B_1M_1.

Маємо, $\angle M_1B_1C_1$ – шуканий.

Задача розв’язана.

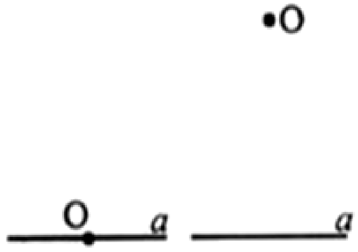
Задача 3. Побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої.

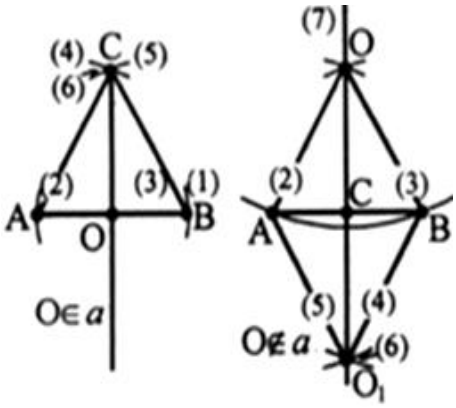
Розв’язання.

При розв’язанні даної задачі необхідно розглядання двох випадків в залежності від положення точки O та даної прямої.

Оформляємо стисло умову у вигляді таблиці 3 з урахуванням наявності двох випадків.

Таблиця 3

<table>
<tr><th>Дано:</th><th>Побудова:</th><th>Доведення:</th></tr>
<tr>
<td>1. $O \in a$.
2. $O \notin a$.


а) б)</td>
<td>

а) б)</td>
<td>1. У ΔABC маємо: AC=BO, звідси OC $\perp a$.
2. $\Delta AO_1O = \Delta BO_1O$. Отже, $\angle AOC = \angle BOC$. ΔAOC= ΔBOC. Отже, $\angle OCA = \angle OCB = 90^0$, тобто CO $\perp a$.</td>
</tr>
</table>

Випадок а): $O \in a$.
Будуємо:
1) коло з центром у точці O довільного радіусу *r*;
2) коло (O; *r*) перетинає пряму *a* в точках A і B;
3) коло (A; AB);
4) коло (B; BA);
5) коло (A; AB) перетинає коло (B; BA) в точці C;
6) пряму CO.

Маємо, CO $\perp a$.

Випадок б): $O \notin a$.
Будуємо:
1) коло з центром у точці O довільного радіусу *r* так, щоб це коло перетинало пряму *a*;
2) коло (O; *r*) перетинає пряму *a* в точках A і B;
3) коло (B; *r*);
4) коло (A; *r*);
5) коло (B; *r*) перетинає коло (A; *r*) у точці O_1;
6) пряму OO_1.

Маємо, $OO_1 \perp a$.

Задача розв’язана для обох випадків.

1.2.3 Контрольні запитання та завдання для самостійного опрацювання

1. Наведіть класифікацію задач в геометрії в залежності від умови і завдання.

2. Вкажіть основні відмінності та етапи розв’язання задач на обчислення. Наведіть приклад задачі на обчислення.

3. Вкажіть основні проблеми при розв’язання задач на доведення.

4. Вкажіть основні відмінності та етапи розв’язання задач на побудову, наведіть приклад задачі на побудову.

5. Сформулюйте мету та основні етапи розв’язування задач на побудову .

6. Вкажіть основні методи розв’язування задач на побудову, їх сутність та відмінності.

7. Поясніть, як побудувати трикутник із даними сторонами, наведіть основні етапи розв'язання.

8. Поясніть, як побудувати кут, що дорівнює даному нерозгорнутому куту.

9. Сформулюйте основні етапи задачі на поділ даного кут навпіл, на три рівні частини.

10. Поясніть, як провести через дану точку пряму, перпендикулярну до даної прямої.

11. Сформулюйте основні етапи побудови серединного перпендикуляру до даного відрізка.

12. Побудуйте рівнобедрений трикутник за відомими основою та периметром.

13. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та кутом при основі.

14. Сформулюйте основні етапи побудови побудови кутів 30°, 60° та 120°.

15. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та висотою, проведеною до основи.

16. Наведіть основні етапи побудови прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

17. Вкажіть основні ГМТ на площині, з якими зустрічаються в школі.

18. ГМТ, яке знаходиться на заданій відстані r від даної точки О, є коло з центром у точці О радіуса r: ω(О;r);

19. Сформулюйте означення ГМТ, рівновіддалених від точок A і B.

20. Наведіть визначення ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих.

1.3 Метод координат для розв’язування геометричних задач на побудову

1.3.1 Стислі теоретичні відомості

Метод координат - це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині (на прямій, у просторі) за допомогою чисел або інших символів.

Мета і навчальні задачі вивчення координатного методу:

- ✓ показати, що координатний метод має свою мову, свої прийоми, дає можливість виражати властивості геометричних фігур аналітичною мовою в вигляді рівнянь і нерівностей і відповідно рівняння функції, нерівності перекладати на геометричну мову (графіків);
- ✓ сформувати понятійний апарат координатного методу;
- ✓ сформувати конкретні прийоми використання координатного методу при вивченні курсів алгебри і геометрії.

Координатний метод дозволяє розв’язувати геометричні задачі засобами алгебри, зводити побудови до обчислень. Координатне розв’язання дозволяє охопити всі можливі частинні випадки. Використання координатного методу сприяє розвитку обчислювальних та графічних навичок, просторових уявлень, геометричної інтуїції учнів, оскільки його застосування передбачає вибір системи координат, обчисленням координат точок, із перекладом мови рівнянь на мову геометрії та навпаки.

Понятійний апарат координатного методу для прямокутної системи координат:

- ✓ абсциса;
- ✓ ордината;
- ✓ координати (точки) - числа, які взяті в певному порядку і характеризують положення точки на прямій, на площині, в просторі;
- ✓ координатна пряма (координатна пряма вводиться поступовим «присвоєнням» точкам прямої визначених чисел, що зроблено у зв’язку з розширенням числових множин і осмислення операції відкладання відрізків);
- ✓ координатна площина.

В формуванні координатного методу в школі, можна виділити такі етапи:

1. Засвоєння понятійного апарату. Здійснюється в основному в 5-6 класах і систематизується в курсі геометрії.

2. Введення на основі цього понятійного апарату рівнянь ліній і графіків функцій. Ці дві навчальні задачі розв’язуються в різних предметах (геометрії і

алгебри), з різною змістовною ціллю, а тому учні часто не бачать між ними зв'язку, і не засвоюють головної суті методу.

3. Розкриття основних етапів застосування методу в курсі алгебри і геометрії.

4. Використання координатного методу для розв'язання різних математичних задач.

Використання координатного методу розв'язування задач передбачає виконання таких кроків:

1) переклад задачі на мову координат;

2) перетворення аналітичного виразу;

3) зворотній перехід, тобто переклад координатної мови на мову, в термінах якої сформульована задача.

Наприклад, програмову тему «Декартові координати на площині» учні вивчають у 9-му класі. Зміст навчального матеріалу наступний: прямокутна система координат на площині; координати середини відрізка; відстань між двома точками із заданими координатами; рівняння кола і прямої. У класах з поглибленим вивченням математики, на заняттях математичного гуртка у звичайних класах доцільно ознайомити учнів з методом координат розв'язування геометричних задач. На прикладах розв'язання принаймні двох задач варто виділити правило-орієнтир методу координат.

Для формування вміння здійснювати перший крок у використанні координатного методу (перекладати умову задачі на мову математики та навпаки) в якості довідника можна використати дані таблиці 1.

Для розв'язування задач координатним методом важливо оволодіти вміннями:

1) будувати точку за її координатами;

2) знаходити координати заданих точок;

3) обчислювати відстань між точками, які задані координатами;

4) обчислювати координати середини відрізка;

5) обирати оптимально систему координат;

6) складати рівняння фігури за її характеристичною властивістю;

7) бачити за рівнянням конкретний геометричний образ;

8) перетворювати алгебраїчні рівності.

Ефективним засобом формування вказаних вмінь є використання систем відповідних задач. Наведемо приклад системи задач, що сприяє формуванню окремих вмінь використовувати координатний метод (таблиця 4).

Таблиця 4

Основні відношення між фігурами на площині

Мова геометрії	Мова координат
Точки A та B лежать на площині	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$
Дано пряма AB	AB: $y=kx+b$; $ax+by+c=0$; $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$
Прямі AB і CD паралельні	AB: $y=k_1x+b_1$; CD: $y=k_1x+b_1$; $\Big\vert \rightarrow AB \parallel CD \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1 \neq b_2$.
Прямі AB і CD перпендикулярні	AB: $y=k_1x+b_1$; CD: $y=k_1x+b_1$; $\Big\vert \rightarrow AB \perp CD \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2=-1$.
Точка O ділить відрізок AB навпіл	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $O(x_0;y_0)$; $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$
Точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_0;y_0)$; $x_0=\dfrac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$; $y_0=\dfrac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}$
Довжина відрізка AB дорівнює m	$A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$; $m=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
Відстань від точки M до прямої AB дорівнює d	$M(x_0;y_0)$, AB: $ax+by+c=0$; $d=\dfrac{\vert ax_0+by_0+c\vert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Дано коло з центром в точці O радіусу R	$O(x_0;y_0)$; $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
Дано еліпс з центром в точці O та півосями a і b, паралельними осям Ox, Oy	$O(x_0;y_0)$; $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

1.3.2 Приклади розв'язування задач

Задача 4. Знайти множину точок, для кожної з яких відстані від двох даних точок рівні.

Розв'язання.

Перший етап.

Позначимо дані точки через A і B. Виберемо систему координат таким чином, щоб точка A була початком координат, а вісь Ox співпадала з прямою AB. Нехай $AB=a$. Тоді у вибраній системі координат: $A(0;0)$ і $B(a;0)$. Точка M належить шуканій множині тоді і тільки тоді, коли $AM=MB$ (рис. 2).

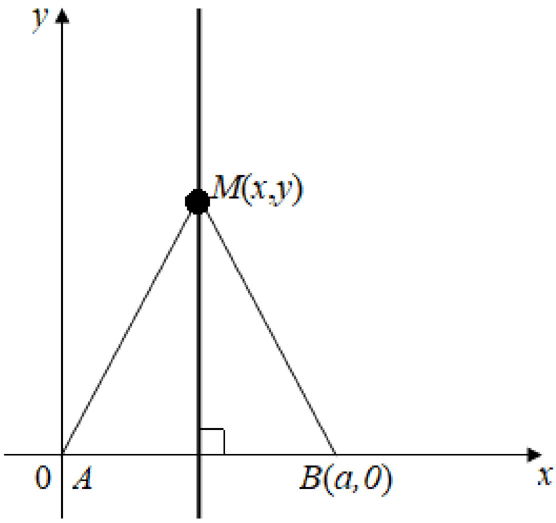


Рис.2. Геометрична інтерпретація умови задачі та етапів розв'язання

Використовуємо наведену вище рівність у формі $AM^2=MB^2$ та використовуємо формулу відстані між двома точками на площині (табл. 2).

Згідно координат точок A і B маємо:

$AM^2=MB^2$;

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(x-a)^2+(y-0)^2;$$

або

$$x^2+y^2=x^2-2a\text{x}+a^2+y^2.$$

Ця рівність є остаточним результатом першого етапу (переклад на координату мову).

Другий етап.

Використовуємо перетворення:

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2a\text{x} + a^2 + y^2$$

та отримаємо остаточно, що

$$x = \frac{a}{2}.$$

Третій етап.

Здійснимо переклад мови рівняння на геометричну мову. Отримане рівняння є рівнянням прямої, що паралельна вісі *Oy* та визначає серединний перпендикуляр до відрізка *AB*.

Остаточно, маємо:

множина точок, для кожної з яких відстані від двох даних точок рівні, є серединним перпендикуляром до заданого відрізка.

Задача 5. Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0.$$

Розв'язання.

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8.$$

Доповнивши двочлени $x^2 - 8x$ і $y^2 - 10y$ до повних квадратів, дістанемо:

$$x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 + y^2 - 2 \cdot 5y + 5^2 = 8 + 4^2 + 5^2$$

або

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49.$$

Звідки маємо, що шукане ГМТ - це коло з центром у точці (4;5) та радіусом **7**.

Задача 6. Скласти рішення еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\sqrt{2})$.

Розв'язання.

Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b. Підставивши в рівняння еліпса координати даних точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1, \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{6}{b^2}\right), \\ \dfrac{9}{3}\left(1-\dfrac{6}{b^2}\right)+\dfrac{2}{b^2}=1; \end{cases}$$

$$3-\frac{18}{b^2}+\frac{2}{b^2}=1; \qquad \frac{16}{b^2}=2; \;\; b^2=8;$$

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{6}{8}\right); \qquad \frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}; \;\; \frac{1}{a^2}=\frac{1}{12}; \;\; a^2=12.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1.$$

1.3.3 Контрольні запитання та завдання для самостійного опрацювання.

1. Вкажіть основні етапи використання координатного методу розв’язування задач.

2. Наведіть основні складові понятійного апарату координатного методу для прямокутної системи координат на площині.

3. Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, середин його сторін та рівняння кола, описано навколо трикутника.

4. Для прямокутника із сторонами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин та точки перетину діагоналей, рівняння кола, описано навколо прямокутника.

5. Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат (всі вершини знаходилися на осях координат). Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, вписаного у квадрат.

6. Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан та рівняння кола, описано навколо трикутника.

6. Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

7. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(6;4)$ і $B(8;3)$.

8. Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$.

9. Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

10. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-8;3)$ і $B(2;-7)$, якщо центр його лежить на прямий $x + 4y + 16 = 0$.

11. Записати рівняння лінії, зображеної на рисунку 3.

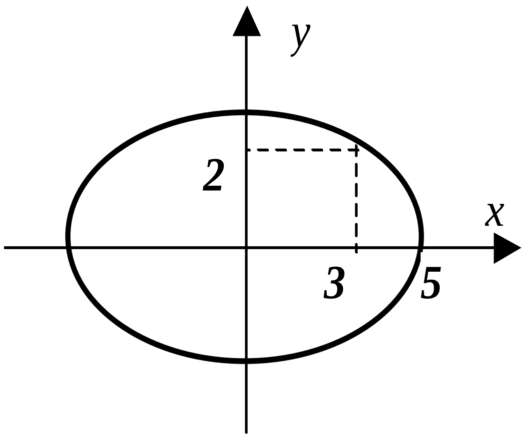


Рис.3. Ескіз еліпсу

12. Записати рівняння лінії, зображеної на рисунку 4.

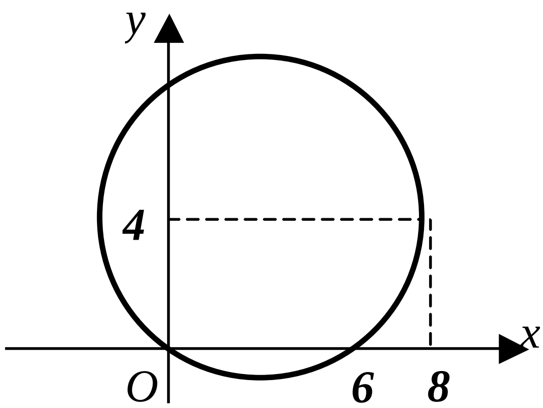


Рис.4. Ескіз кола

1.4 Метод векторів для розв’язування геометричних задач

1.4.1 Стислі теоретичні відомості

Суть методу векторів полягає в тому, щоб певне геометричне розміщення точок, прямих і площини у просторі записати мовою векторів, точніше - у вигляді векторної рівності. І навпаки, мову векторних формул і рівностей наповнити геометричним змістом, тобто перевести ту чи іншу векторну рівність на мову геометрії, надати їй геометричного звучання.

Цілі вивчення векторного методу:

- ✓ дати ефективний метод розв’язання різних геометричних задач і доведення теорем;
- ✓ показати широке застосування векторного апарату в інших областях знань: техніці, фізиці, хімії і ін.;
- ✓ показати використання векторного методу при розв’язуванні задач з метою формування в учнів уміння виконувати узагальнення і конкретизацію;
- ✓ формувати в учнів такі якості мислення, як гнучкість, цілеспрямованість, раціональність, критичність та ін.

За діючою програмою тему «Вектори на площині» учні вивчають у 9-му класі. Зміст навчального матеріалу такий: вектор, його модуль та напрям; рівність векторів; координати вектора; додавання і віднімання векторів; множення вектора на число; колінеарні вектори; скалярний добуток векторів. Вектори віднесені, як записано у пояснювальній записці до програми, до засобів, за допомогою яких доводяться математичні твердження. У зв’язку зі зменшенням кількості годин на вивчення математики в школі, програма та автори чинних підручників з геометрії не ставлять за мету систематично використовувати векторний метод при доведенні теорем і розв’язуванні задач, а передбачають вивчати вектори із загальноосвітньою метою і послуговуватися ними лише для розв’язування найпростіших стандартних задач.

Безперечно в спеціалізованих школах і класах із поглибленим вивченням математики, на факультативах векторний метод має широко застосовуватися. Вектор - поняття математичне, що знаходить своє застосування в фізиці та в інших прикладних науках.

В математиці розглядають вільні вектори (вектор не зв’язаний ні з якою прямою і ні з якою фіксованою точкою). В різних підручниках геометрії (діючих та тих, що використовувались раніше) є різні трактовки поняття вектора:

- ✓ вектор - паралельне перенесення (О. Н. Колмогоров);
- ✓ вектор - напрямлений відрізок (А. В. Погорєлов, Л. С. Атанасян, Г.П. Бевз);
- ✓ вектор — множина однаково напрямлених відрізків однакової довжини (В. Г. Болтянський).

Що являється причиною для різних трактувань вектора? Яка із трактовок є найбільш допустима для шкільного курсу геометрії і чому? Введення поняття вектор може бути здійснено в рамках конкретної інтерпретації векторного простору, а саме «вектор - напрямлений відрізок». Така точка зору на вектор прийнята в усіх діючих підручниках геометрії середньої школи. В деяких підручниках по методиці викладання математики виділяються позитивні і негативні підходи до цього, але автори виходять при цьому із міркувань простоти, доступності, додатків, залучаючи до обґрунтувань своїх тверджень серйозні теоретичні положення.

Отже, **трактовка вектора як напрямленого відрізка**, надає цим об’єктам і операціям над ними виразну наочність, це дійсно дуже важливо, так як в процесі формування поняття велику роль відіграє образний компонент в результаті чого бажані такі означення, які дозволяють уяві легко конструювати зразки означених об’єктів. Такий висновок погоджується з результатами психологічних досліджень: в згорнутому вигляді розпізнання може здійснюватися за зовнішніми ознаками об’єктів, а не за ознаками, за якими воно здійснювалось на рівні розгорнутого виконання дії (або за ознаками, які використані в означенні поняття).

Операції над векторами, які вивчаються в школі, такі:

- ✓ додавання векторів (віднімання),
- ✓ множення векторів на число,
- ✓ скалярний добуток векторів.

Ці операції вводяться:

1) в геометричній формі;
2) в координатній формі.

Центральним в даній темі є поняття координат вектора. При доведенні теорем даної теми застосовуються як координатний, так і традиційно-синтетичні методи. Загальна ідея доведення векторних рівностей за допомогою координат така: для доведення векторної рівності досить встановити рівність відповідних координат векторів, записаних в обох його частинах.

Понятійний апарат векторного методу.

Основні поняття:

- ✓ вектор,
- ✓ початок вектора,
- ✓ кінець вектора,
- ✓ співнаправлені вектори,
- ✓ протилежно напрямлені вектори,
- ✓ абсолютна величина вектора (модуль вектора),
- ✓ рівні вектори,
- ✓ нульовий вектор,
- ✓ координати вектора,
- ✓ проекція вектора на вісь,
- ✓ колінеарні вектори,
- ✓ одиничний вектор,
- ✓ координатні вектори (орти),
- ✓ скалярний добуток векторів,
- ✓ кут між двома ненульовими векторами.

Основні дії:

✓ додавання векторів (правило трикутника або паралелограма), віднімання векторів, множення вектора на число;

✓ зображення вектора в вигляді суми, різниці двох векторів; в вигляді добутку вектора на число;

✓ заміна вектора йому рівним за допомогою паралельного перенесення;

✓ розкладання вектора по осях;

✓ перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між довжинами і виконання оберненої дії;

✓ вираження довжини вектора через скалярний квадрат;

✓ вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжин цих векторів.

Основні етапи формування векторного методу в учнів.

1. Підготовчий етап (мета - оволодіння вказаними поняттями і основними діями).

2. Мотиваційний етап (завдання - показати необхідність оволодіння методом).

3. Орієнтувальний етап (мета — роз’яснення суті методу і виділити основні компоненти на прикладі розв’язаної задачі).

4. Етап оволодіння компонентами метода (мета — формувати компоненти методу, використовуючи спеціально підібрані задачі).

5. Етап формування методу в «цілому» (мета - визначення змісту вправ і їх розв’язання).

Основні компоненти векторного методу розв’язання задач:

1) переклад умови задачі на мову векторів, в тому числі:

✓ введення в розгляд векторів,

✓ вибір системи координат (якщо це необхідно),

✓ вибір базисних векторів,

✓ розклад введених векторів по базисним;

2) складення системи векторних рівностей (або однієї рівності);

3) спрощення векторних рівностей;

4) заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями і їх розв’язання;

5) пояснення геометричного смислу одержаного розв’язку цієї системи (або одного рівняння).

Для визначення змісту вправ, які формують вміння застосовувати вектори необхідно виділити дії, адекватні цій діяльності.

Специфічні розумові дії, які входять до складу діяльності, спрямованій на використання векторного методу:

1. Перекладати геометричні терміни на мову векторів та навпаки (здійснювати перехід від співвідношення між фігурами до співвідношення між векторами та навпаки).

2. Виконувати операції над векторами (знаходити суму, різницю векторів, добуток вектора на число).

3. Представляти вектор у вигляді суми, різниці векторів.

4. Представляти вектор у вигляді добутку вектора на число.

5. Перетворювати векторні співвідношення.

6. Переходити від співвідношення між векторами до співвідношення між їх довжинами та навпаки.

7. Виражати довжину вектора через його скалярний квадрат.

8. Виражати величину кута між векторами через їх скалярний добуток.

Таблиця 5

Основні відношення між фігурами на площині

Мова геометрії	Мова векторів
$AB \parallel CD$	$\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$
$AB \perp CD$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$
Точки A, B, C належить одній прямій a	$\overline{AB} = k \cdot \overline{BC}$ або $\overline{AC} = k \cdot \overline{BC}$ або $\overline{AC} = k \cdot \overline{AB}$; $\overline{OC} = p \cdot \overline{OA} + q \cdot \overline{OD}$, де O – довільна точка, $p+q=1$
$A=B$	$\overline{AB} = 0$ або $\overline{OA} = \overline{OB}$
Точка C належить відрізку AB: $AB : CB = m : n$	$\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CB}$ або $\overline{OC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overline{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overline{OB}$ для деякої точки O
m – довжина відрізка AB	$m^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$
$OABC$ – паралелограм	$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC}$; $\overline{OA} = \overline{CB}$ або $\overline{OC} = \overline{AB}$
Обчислити величину кута	Обчислити: $cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert}$
M_1 – середина відрізка A_1B_1, M_2 – середина відрізка A_2B_2	$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2}\right)$

Векторний метод, як і будь-який інший, не є універсальним, хоча і дозволяє розв’язувати широкий круг геометричних задач.

Геометричні задачі, які доцільно розв’язувати методом векторів:

1) задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;

2) задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок в деякому відношенні;

3) задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;

4) задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;

5) задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;

6) задачі на знаходження величини кута.

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом-орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладах двох тверджень, які учні вміють доводити і без застосування векторів. Проілюструємо використання методу векторів для розв'язування планіметричної задачі.

1.4.2 Приклади розв'язування задач

Задача 7. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.

Розв'язання.

Розглянемо трикутник *ABC* (рис. 5). Нехай *AD* : *DB* = *m* : *n*. Відкладемо на сторонах *CA* і *CB* вектори одиничної товщини: $\overline{CA_1} = \bar{l}_1$ і $\overline{CA_2} = \bar{l}_2$.

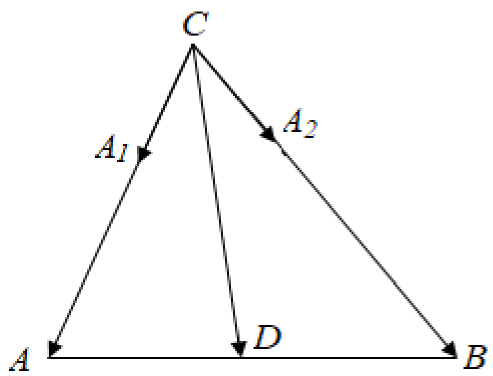


Рис. 5. Трикутник *ABC*

Виразимо $\overline{CD}$ двічі через вектори $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$:

$$\overline{CD} = \frac{m}{m+n}\cdot\overline{CB} + \frac{n}{m+n}\cdot\overline{CA} = \frac{m}{m+n}\cdot a\cdot\bar{l}_1 + \frac{n}{m+n}\cdot b\cdot\bar{l}_2,$$

де *a*, *b* – довжини векторів $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$.

Іншим способом:

$$\overline{CD} = x\cdot\left(\bar{l}_1 + \bar{l}_2\right) = x\cdot\bar{l}_1 + x\cdot\bar{l}_2 \ .$$

Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m+n} \cdot a = x, \\ \dfrac{n}{m+n} \cdot b = x, \end{cases}$$

Поділимо ці два рівняння системи, отримаємо:

$\dfrac{n \cdot b}{a \cdot m} = 1$, звідси отримаємо рівність:

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{a}$.

Остаточно, $AD : DB = AC : BC$.

Задача розв'язана.

1.4.3 Контрольні запитання та завдання для самостійного опрацювання.

1. Вкажіть основні компоненти векторного методу розв'язання задач.

2. Вкажіть основні етапи формування векторного методу в учнів.

3. Точки M и N лежать відповідно на сторонах AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Доведіть, що середини відрізків AB, MN и CD лежать на одній прямій.

4. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перпендикулярні.

5. Доведіть,що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

6. На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову $BD : DA = 3:1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.

7. Доведіть векторним методом властивості середньої лінії трапеції.

8. Доведіть векторним методом, що сума квадратів діагоналей прямокутника дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

9. Доведіть векторним методом властивості середньої лінії трикутника .

10. Доведіть векторним методом, що діагоналі ромба перпендикулярні.

11. Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний її основам.

12. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

РОЗДІЛ 2

ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ GRAN-2D ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1 Можливості ППЗ GRAN

Сучасні інформаційні технології навчання у середній школі сприяють розв'язанню проблеми інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу та активізації і розвитку творчого мислення учнів. Технології комп'ютерного навчання сприяють індивідуалізації та диференціації процесу навчання, реалізації діяльністного підходу, забезпечують раціоналізацію праці вчителя й учня. Сучасні педагогічні дослідження вказують на той факт, що для переважної більшості учнів притаманний наочно-образний тип мислення. Для людей з таким типом мислення наочність є необхідною складовою, яке забезпечує ефективне розв'язання задач та встановлення зв'язку нового поняття з уже відомими. В свою чергу використання наочності програмних засобів допомагає учням розвивати просторову уяву із формуванням різносторонніх уявлень про властивості геометричних об'єктів, що є необхідною умовою при вивченні шкільного курсу планіметрії.

Одним з перших вітчизняних програмних засобів можна вважати програмний комплекс для підтримки навчання математики – педагогічний програмний засіб GRAN (ППЗ GRAN), розробка якого розпочалася у 1989 році авторським колективом під керівництвом відомого українського вченого Мирослава Івановича Жалдака, академіка АПН України []. До складу програмно-методичного комплексу GRAN входять ППЗ GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, які забезпечують підтримку вивчення розділів планіметрії та стереометрії, алгебри і початків аналізу, окремих питань з теорії ймовірностей і математичної статистики, а також окремих розділів фізики в школі (7-11 класи).

За допомогою GRAN1 (GRaphic ANalysis) рекомендовано розв'язувати задачі на побудову графіків залежностей між змінними (у декартових та полярних системах координат; дослідження графіків функцій і залежностей між змінними (до 9 параметрів); побудову дотичних і січних до графіків функцій; графічне розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем (для випадку з однією чи двома змінними); обчислення визначених інтегралів, площ фігур і поверхонь, об'ємів тіл обертання; опрацювання статистичних даних, включаючи графічний аналіз даних.

ППЗ GRAN-2D призначений для графічного аналізу геометричних об'єктів на площині та дозволяє створювати динамічні моделі геометричних фігур і їх комбінацій; проводити вимірювання геометричних величин та аналізувати динамічні вирази, висувати відповідні припущення; будувати графічні зображення із можливістю використання коментарів та підказок;

експортувати рисунки. Програма функціонує під управлінням операційної системи Windows. Для встановлення програми слід запустити на виконання файл SETUP.EXE з диску дистрибутива (обсягом близько 1.44Mb) та відповісти на всі стандартні запити інсталяторів (за посиланням https://ktoi.fi.npu.edu.ua/zavantazhyty/category/2-gran2d). Після успішного встановлення у вибраній папці буде створено файл GRAN2D.EXE – основна програма, та у додатковій субдиректорії HELP буде створено допоміжні файли допомоги. Надалі при натисненні кнопки «Пуск» назва програми GRAN-2D з'являтиметься як пункт меню Програми, при зверненні до якого відбуватиметься запуск ППЗ GRAN-2D.

Для графічного аналізу 3D об'єктів призначений пакет ППЗ GRAN-3D.

Використання пакету GRAN-3D дозволяє створювати і перетворювати моделі базових просторових об'єктів; вимірювати відстані і кути; отримувати перерізи многогранників площинами; обчислювати об'єми і площі поверхонь многогранників і тіл обертання.

2.2 Приклади розв'язування задач за допомогою ППЗ GRAN-2D.

Задача 8. Побудувати трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола із використанням ППЗ GRAN-2D.

Розв'язання.

Для розв'язування задач методом геометричних місць необхідно з'ясувати: до знаходження яких точок зводиться розв'язання задачі і які дві вимоги мають ці точки задовольняти. Далі розглядають одну з вимог задачі і будують геометричне місце точок (ГМТ), що задовольняють цю вимогу. Потім будують ГМТ, які задовольняють інші вимоги і, нарешті, знаходять точки перетину геометричних місць точок.

На рисунку 6 показано копію вікна побудови з умовою задачі, заданими відрізками, відкритими підказками та додатковим малюнком, які можна приховати, «натиснувши» відповідну кнопку.

Проведемо аналіз даної задачі.

Нехай точка А – вершина трикутника ABC, навколо якого описане коло радіуса R. Необхідно знайти розташування інших вершин трикутника – точок В і С. Точка В, по-перше, лежить на даному колі радіуса R, а по-друге віддалена від точки А на відстань c. Тобто вона лежить на перетині даного кола і кола з центром в точці А і радіусом c. Точка С також лежить на даному колі та віддалена від А на відстань b. Отже, вона лежить на перетині даного кола і кола з центром в точці А і радіусом b.

Під час побудови легко встановити, що шуканих трикутників два.

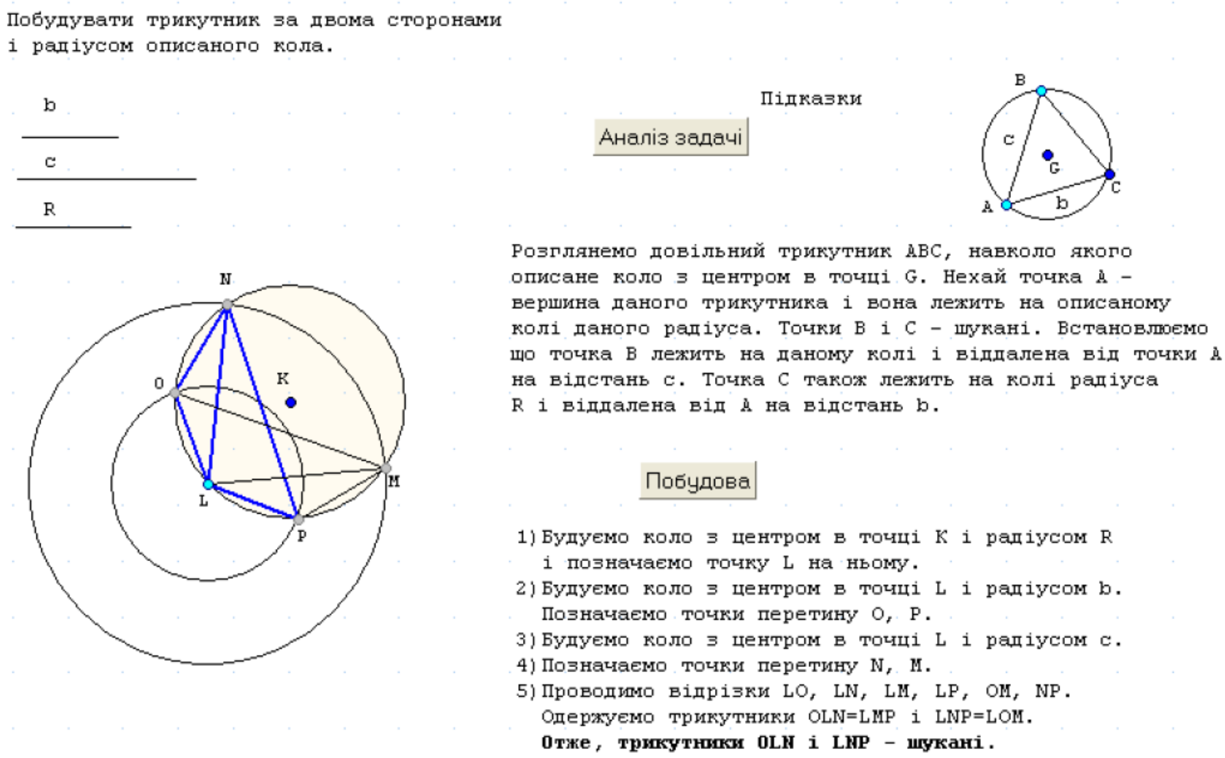


Рис. 6. Вікно побудови задачі 1 у ППЗ GRAN-2D

Особливої уваги заслуговують задачі, у яких використовуються змінні величини, причому така змінна величина може бути задана і неявним чином.

Задача 9. Задано довільний трикутник ABC. BH – висота трикутника. Знайти розташування точки H.

Розв'язання.

Задана задача є задачею на дослідження, у якості змінною величини є кут при основі, хоча в умові прямо про це й не говориться.

Побудуємо модель трикутника у програмі GRAN-2D (рис. 7):

1) створюємо три незалежні точки A,B та C;

2) створюємо пряму AC ;

3) створюємо трикутник ABC;

4) створюємо пряму, що проходить через точку B, перпендикулярну до прямої AC. Точка перетину цих прямих дає точку H;

5) створюємо висоту BH;

6) ховаємо ті об'єкти, що заважають сприйняттю моделі (у цьому разі – пряма BH).

Побудова комп'ютерної моделі практично не відрізняється від побудови малюнка в зошиті. Але, на відміну від нього, ця модель є динамічною: зміна розташування будь-якої з вершин трикутника впливає на розташування точки. Це дозволяє визначити залежність між розташуванням точки H та кутами при основі трикутника, на яку опущена дана висота H:

1) якщо обидва кути гострі – точка H належить основі трикутника;
2) якщо один із кутів прямий – точка H співпадає з відповідною вершиною трикутника;
3) якщо один із кутів тупий – точка H лежить поза основою трикутника на прямій AC.

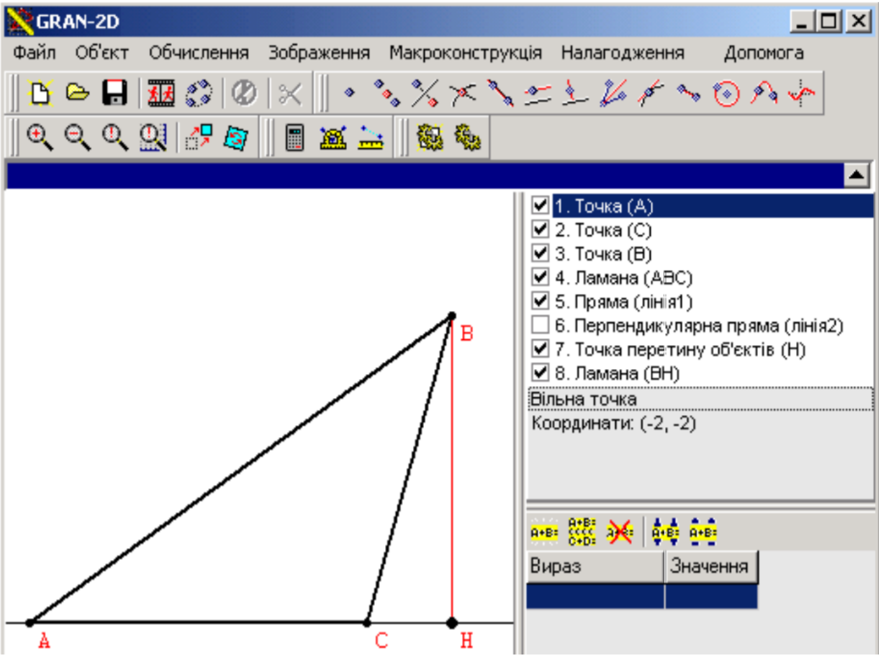


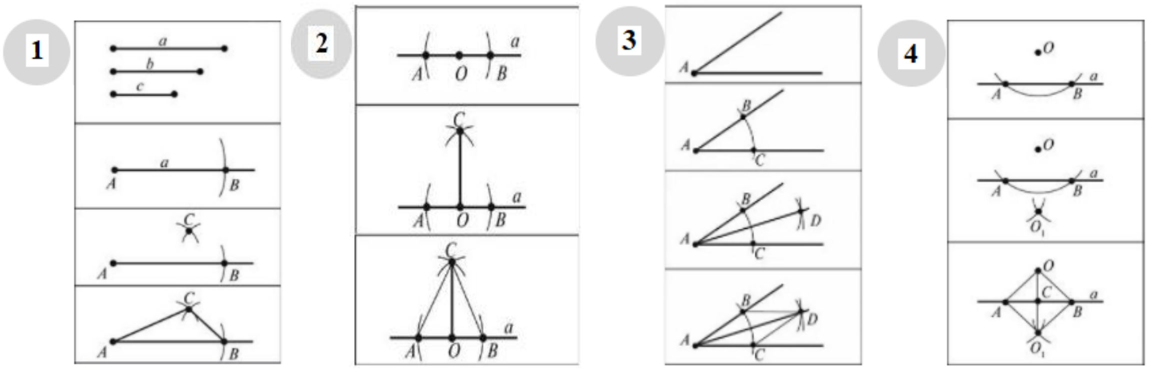
Рис. 7. Вікно побудови задачі 2 у ППЗ GRAN-2D

Задача розв’язана.

Наведену динамічну модель активізує пізнавальну діяльність студентів, пропонуючи за побудованою моделлю у процесі її дослідження знайти певні закономірності, придумати задачу, сформулювати теорему. Запропонувавши студентам модель попередньої задачі, не формулюючи її умови, педагог ставить перед студентами проблему: провівши відповідне дослідження, сформулювати та розв‘язати задачу, відповідну до цієї моделі. Використання на заняттях таких задач, створення відповідних моделей вимагає осмисленого підходу до порядку виконуваних дій, усвідомлення взаємозв‘язків між окремими елементами моделі, передбачення наслідків своїх дій. Зрозуміло, що без певних шаблонів обійтися неможливо, наприклад, побудова серединного перпендикуляру або кола, описаного навколо трикутника. Набуваючи певних знань та навичок побудови динамічних моделей при розв‘язуванні геометричних задач, одержані знання можна переносити на розв‘язування задач з алгебри, використовуючи програми динамічної геометрії. Окрім того, що ці програми містять послуги побудови графіків функцій, деякі алгебраїчні задачі розв‘язуються шляхом створення геометричної фігури, що є графіком заданої функціональної залежності. Розв’язування задач з параметром, коли значення параметру може визначатись координатою однієї з незалежних точок.

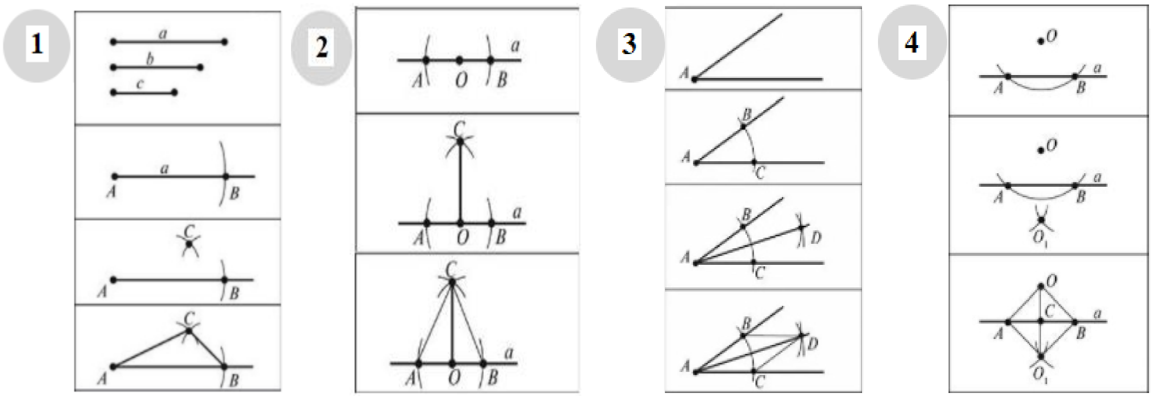
РОЗДІЛ 3

ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

ВАРІАНТ 1	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови перпендикуляра до прямої через точку, що не лежить на даній прямій? 
А2	Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\sqrt{2})$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, середин його сторін.
БЛОК В	
В1	Відстань між населеними пунктами А та В становить 130 км, а від них до залізниці 60 км та 110 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки трикутник за трьома сторонами.
В3	Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+6x+4y-12=0$.
В4	Точки M и N лежать відповідно на сторонах AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Доведіть, що середини відрізків AB, MN и CD лежать на одній прямій.

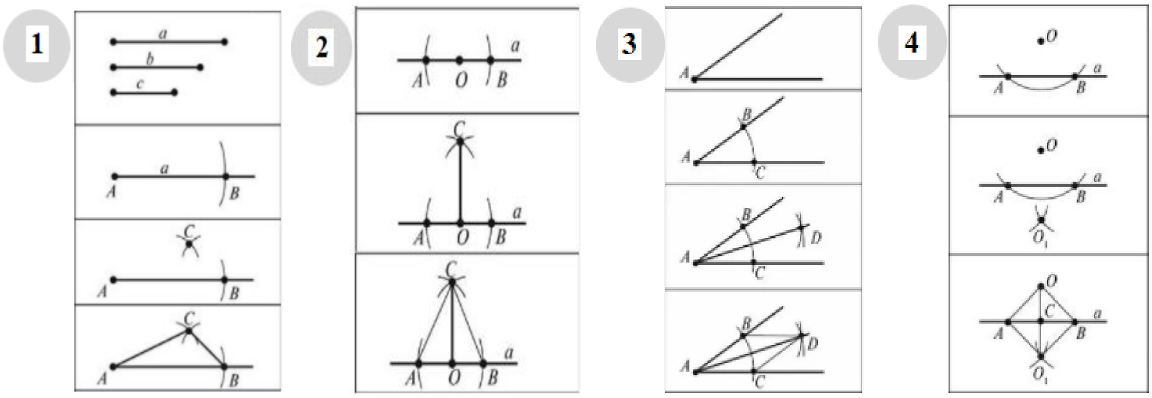
ВАРІАНТ 2

БЛОК А

А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка? 
А2	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
А3	Дан квадрат із стороною *a*. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, вписаного у квадрат.

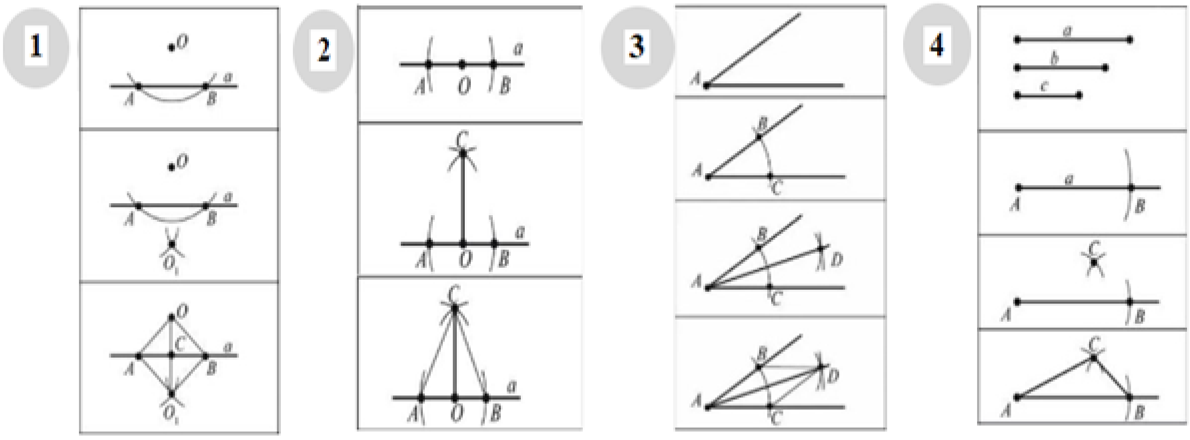
БЛОК В

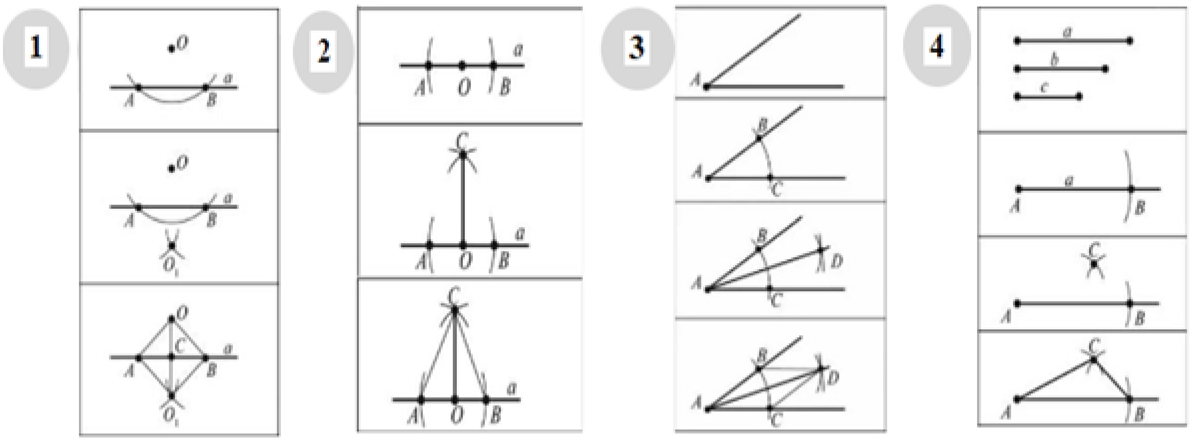
В1	Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки А(6;0) в три рази більша за відстань до точки В (2/3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.
В3	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки *A*(-8;3) і *B*(2;-7), якщо центр його лежить на прямій $x + 4y + 16 = 0$.
В4	На гіпотенузі *AB* трикутника *ABC* взято точку *D*, що задовольняє умову *BD* : *DA* = 3:1. Виразити довжину відрізка *CD* через довжини катетів: *CB = a, CA = b*.

ВАРІАНТ 3	
БЛОК А	
A1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
A2	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2-4x-16y+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.
A3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, описаного навколо квадрату.
БЛОК В	
B1	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
B2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за двома катетами.
B3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.
B4	Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

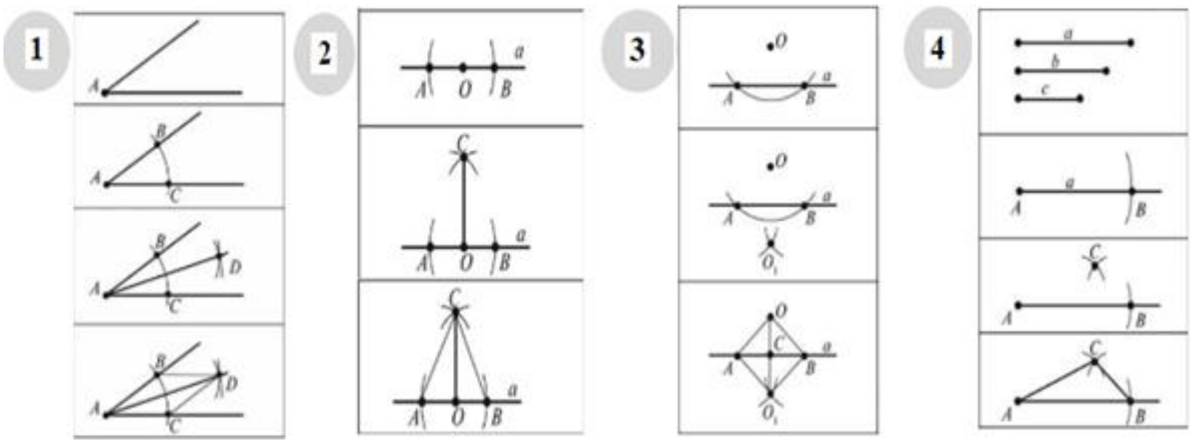
ВАРІАНТ 4	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. Г Д В А Б 2. В А Г Д Б 3. В Г Д А Б 4. Б В Г А Д
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан та рівняння кола, описано навколо трикутника.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в два рази більша за відстань до точки M (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник за стороною та двома прилеглими кутами.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+2y^2-8x-8y-1=0$.
В4	Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний її основам.

ВАРІАНТ 5	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. Г Д В А Б 2. В А Г Д Б 3. В Г Д А Б 4. Б В Г А Д
А2	Скласти рішення еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо він проходить через точки $A(3;\sqrt{2})$ і $B(\sqrt{3};\sqrt{6})$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами *a* і *b* оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння та довжини медіан.
БЛОК В	
В1	Відстань між населеними пунктами А та В становить 260 км, а від них до залізниці 120 км та 220 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізку.
В3	Знайдіть відстань між центрами кривих $x^2+2y^2+2x+16y+32=0$ і $x^2+y^2+6x+4y-12=0$.
В4	Точки *M* и *N* лежать відповідно на сторонах *AD* і *BC* чотирикутника *ABCD*, причому *AM* : *MD* = *BN* : *NC* = 3 : 4. Доведіть, що середини відрізків *AB*, *MN* и *CD* лежать на одній прямій.

ВАРІАНТ 6	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка? 
А2	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 18, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння кола, описаного навколо квадрату.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки $C(6;0)$ в три рази більша за відстань до точки $A(2/3;0)$. Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.
В3	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-8;3)$ і $B(2;-7)$, якщо центр його лежить на прямий $y = -0{,}25x - 4$.
В4	На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову $BD : DA = 3:1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.

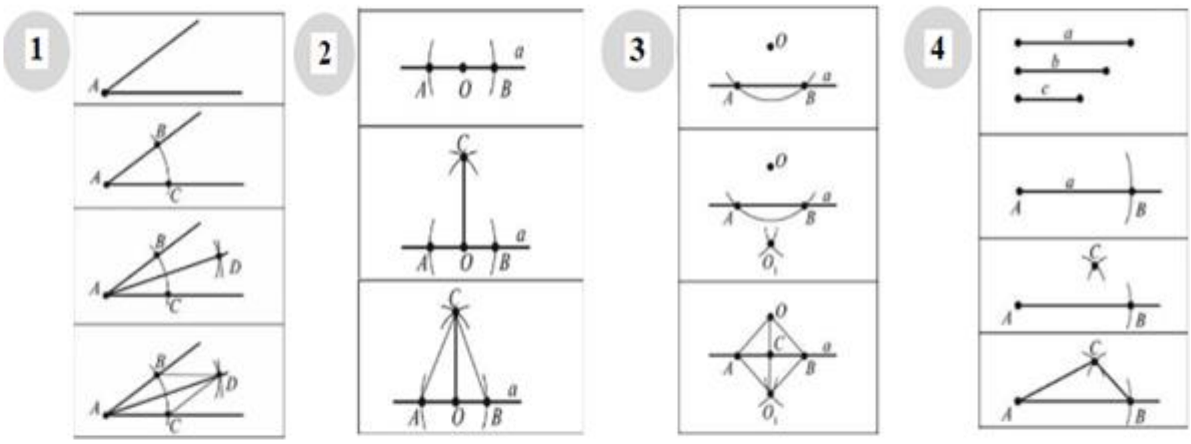
ВАРІАНТ 7	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
А2	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2+12x+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння діагоналей.
БЛОК В	
В1	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за катетом та гіпотенузою.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2+8x+10y-8=0$.
В4	Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

ВАРІАНТ 8	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Відповіді: 1. Б В Г А Д 2. В Г Д А Б 3. В А Г Д Б 4. Г Д В А Б
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан та рівняння кола, описано навколо трикутника.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в два рази більша за відстань до точки M (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати бісектрису даного кута.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+2y^2+8x-4=0$.
В4	Довести, векторним методом властивості середньої лінії трапеції.

ВАРІАНТ 9	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови перпендикуляра до прямої через точку, що не лежить на даній прямій? 
А2	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння середин його сторін.
А3	Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\sqrt{2})$.
БЛОК В	
В1	Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ і $x^2+y^2-10x+16y+80=0$.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки трикутник за трьома сторонами.
В3	Відстань між населеними пунктами А та В становить 390 км, а від них до залізниці 180 км та 330 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В4	Точки M и N лежать відповідно на сторонах AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Доведіть, що середини відрізків AB, MN и CD лежать на одній прямій.

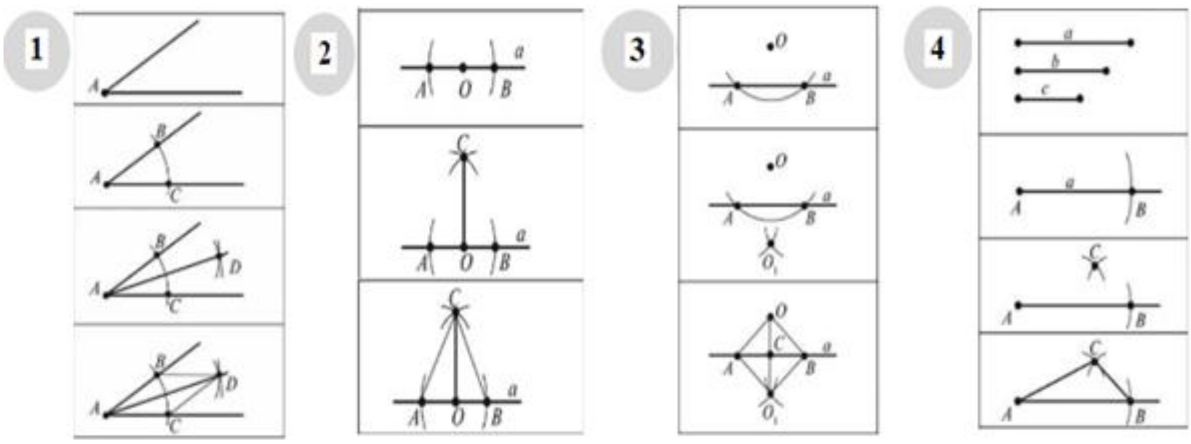
ВАРІАНТ 10

БЛОК А

А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка? 
А2	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 24, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння його діагоналей, рівняння кола, вписаного у квадрат.

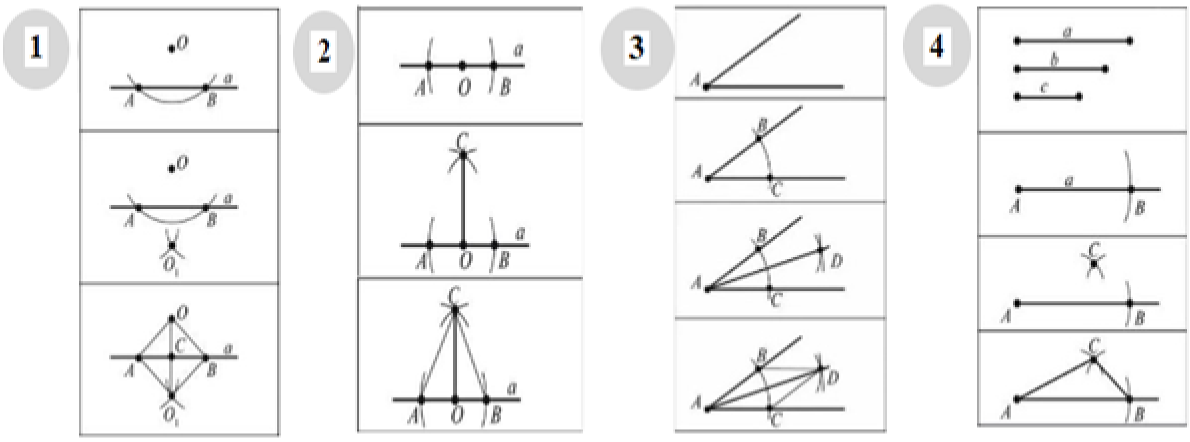
БЛОК В

В1	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(2;-7)$ і $B(-8;3)$, якщо центр його лежить на прямий $x + 4y = -16$.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.
В3	Матеріальна точка M рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки A(6;0) в три рази більша за відстань до точки B (2/3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки M.
В4	На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову $BD : DA = 3:1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.

ВАРІАНТ 11	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
А2	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2+16y+28=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей та їх рівняння.
БЛОК В	
В1	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2+8x+10y-8=0$.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за двома катетами.
В3	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В4	Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

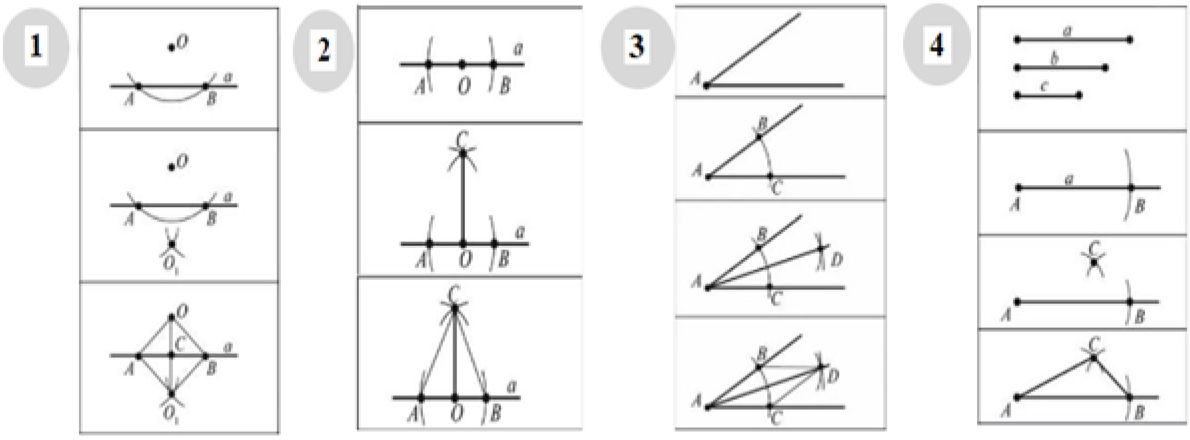
ВАРІАНТ 12	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. В А Г Д Б 2. Г Д В А Б 3. В Г Д А Б 4. Б В Г А Д
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан.
БЛОК В	
В1	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+2y^2+8x+8y-1=0$.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник за стороною та двома прилеглими кутами.
В3	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в два рази більша за відстань до точки M (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В4	Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний її основам.

ВАРІАНТ 13	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. В Г Д А Б 2. В А Г Д Б 3. Г Д В А Б 4. Б В Г А Д
А2	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння та довжини медіан.
А3	Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
БЛОК В	
В1	Відстань між населеними пунктами А та В становить 260 км, а від них до залізниці 120 км та 220 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-8;3)$ і $B(2;-7)$, якщо центр його лежить на прямий $y = -0{,}25x - 4$.
В3	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізку.
В4	На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову $BD : DA = 3:1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.

ВАРІАНТ 14	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка? 
А2	Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(3;\sqrt{2})$ і $B(\sqrt{3};\sqrt{6})$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати та рівняння його вершин, рівняння кола, вписаного у квадрат.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки $C(6;0)$ в три рази більша за відстань до точки $A(2/3;0)$. Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.
В3	Знайдіть відстань між центрами кривих $x^2+2y^2+2x+16y+32=0$ і $x^2+y^2+6x+4y-12=0$.
В4	Точки M и N лежать відповідно на сторонах AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Доведіть, що середини відрізків AB, MN и CD лежать на одній прямій.

ВАРІАНТ 15

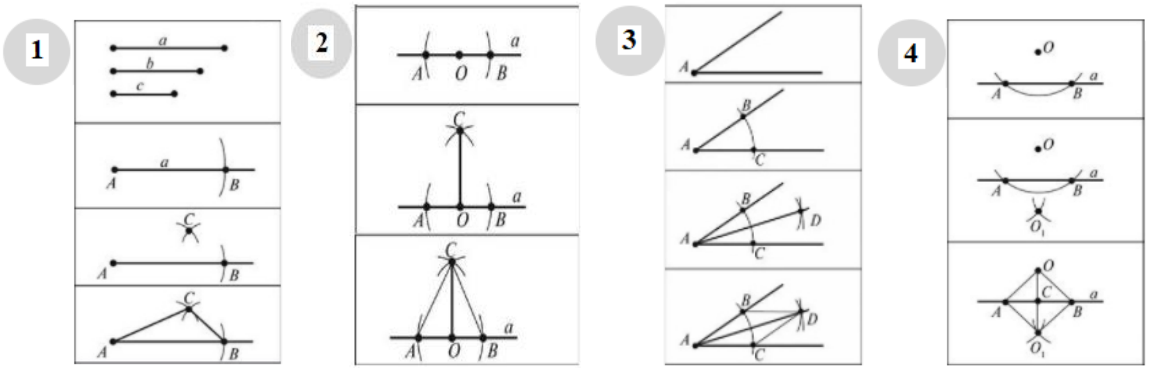
БЛОК А

А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння діагоналей та кола, описаного навколо квадрату.

БЛОК В

В1	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за двома катетами.
В2	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+2y^2-8x-4=0$.
В4	Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

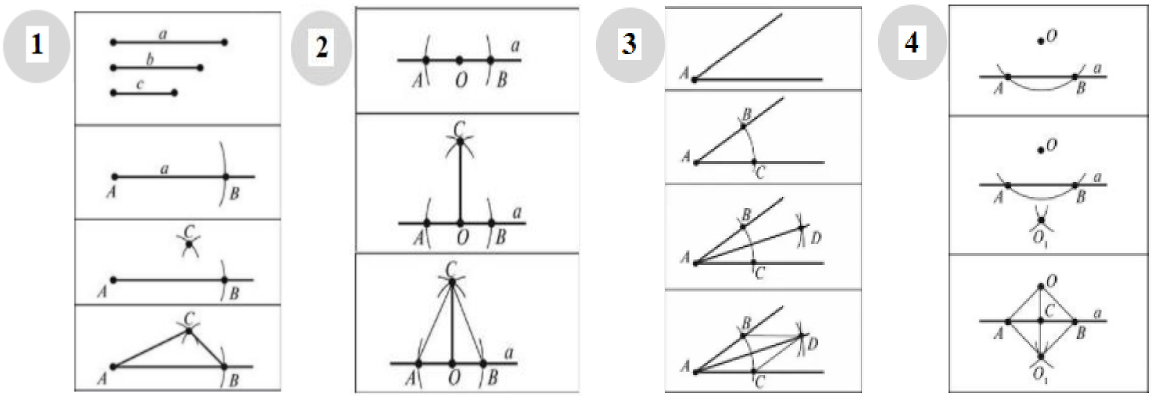
ВАРІАНТ 16	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Відповіді: 1. Б В Г А Д 2. В Г Д А Б 3. В А Г Д Б 4. Г Д В А Б
А2	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан та рівняння кола, описано навколо трикутника.
А3	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2+12x+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в два рази більша за відстань до точки M (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати бісектрису даного кута.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2+10x+8y-8=0$.
В4	Довести, векторним методом властивості середньої лінії трапеції.

ВАРІАНТ 17	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови перпендикуляра до прямої через точку, що не лежить на даній прямій? 
А2	Дан квадрат із стороною *а*. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, вписаного у квадрат.
А3	Визначити координати цента та радіус кола із загального рівняння $x^2 + y^2 - 16x + 10y + 80 = 0$
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки А(6;0) в три рази більша за відстань до точки В (2/3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки трикутник за трьома сторонами.
В3	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки *A*(-8;3) і *B*(2;-7), якщо центр його лежить на прямий $x + 4y + 16 = 0$.
В4	Точки *M* и *N* лежать відповідно на сторонах *AD* і *BC* чотирикутника *ABCD*, причому *AM* : *MD* = *BN* : *NC* = 3 : 4. Доведіть, що середини відрізків *AB, MN* и *CD* лежать на одній прямій.

ВАРІАНТ 18

БЛОК А

А1 На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка?



А2 Визначити координати цента та радіус кола із загального рівняння $x^2+y^2-10x-16y+80=0$

А3 Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, середин його сторін.

БЛОК В

В1 З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.

В2 Відстань між населеними пунктами А та В становить 130 км, а від них до залізниці 60 км та 110 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.

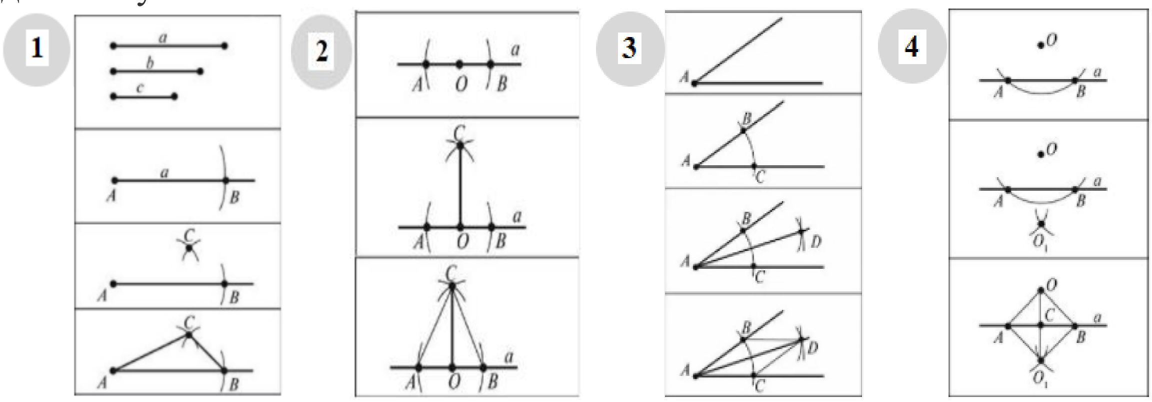
В3 Знайдіть рівняння прямої, що проходить через центри кіл $x^2+y^2+10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+4x+6y-12=0$.

В4 На гіпотенузі *AB* трикутника *ABC* взято точку *D*, що задовольняє умову *BD* : *DA* = 3:1. Виразити довжину відрізка *CD* через довжини катетів: *CB* = *a*, *CA* = *b*.

ВАРІАНТ 19	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. Г Д В А Б 2. В А Г Д Б 3. В Г Д А Б 4. Б В Г А Д
А2	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2-4x-16y+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, описаного навколо квадрату.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в два рази більша за відстань до точки М (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за двома катетами.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.
В4	Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

ВАРІАНТ 20

БЛОК А

А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан та рівняння кола, описано навколо трикутника.

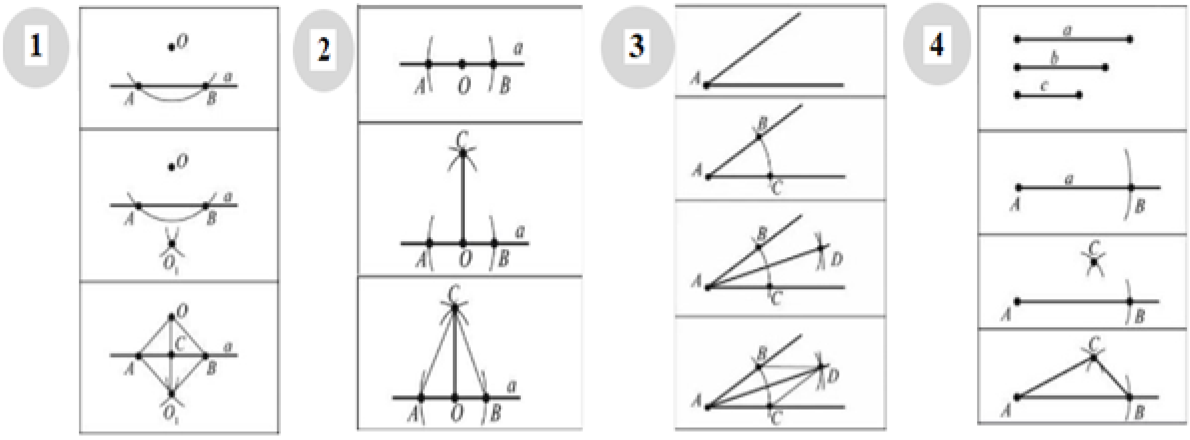
БЛОК В

В1	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник за стороною та двома прилеглими кутами.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $2x^2+y^2-8y-9=0$.
В4	Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний її основам.

<table>
<tr><td colspan="2">ВАРІАНТ 21</td></tr>
<tr><td colspan="2">БЛОК А</td></tr>
<tr><td>А1</td><td>Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А.
А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута.
Б) Проводимо промінь AD.
В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А.
Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом.
Д) Позначаємо точку перетину кіл D.
Варіанти відповіді:
1. Г Д В А Б   2. Б В Г А Д
3. В Г Д А Б   4. В А Г Д Б</td></tr>
<tr><td>А2</td><td>Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(3;\sqrt{2})$ і $B(\sqrt{3};\sqrt{6})$.</td></tr>
<tr><td>А3</td><td>Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння медіан та координати їх точки перетину.</td></tr>
<tr><td colspan="2">БЛОК В</td></tr>
<tr><td>В1</td><td>Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки $C(6;0)$ в два рази більша за відстань до точки $A(2/3;0)$. Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.</td></tr>
<tr><td>В2</td><td>З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізку.</td></tr>
<tr><td>В3</td><td>Знайдіть відстань між центрами кривих $x^2+2y^2-2x-16y+32=0$ і $x^2+y^2+4y-12=0$.</td></tr>
<tr><td>В4</td><td>Точки M и N лежать відповідно на сторонах AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Доведіть, що середини відрізків AB, MN и CD лежать на одній прямій.</td></tr>
</table>

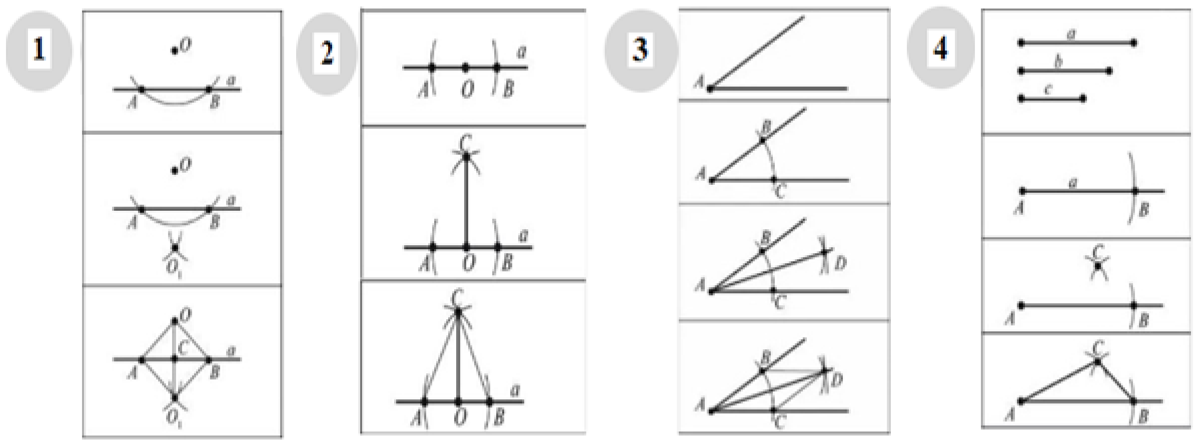
ВАРІАНТ 22

БЛОК А

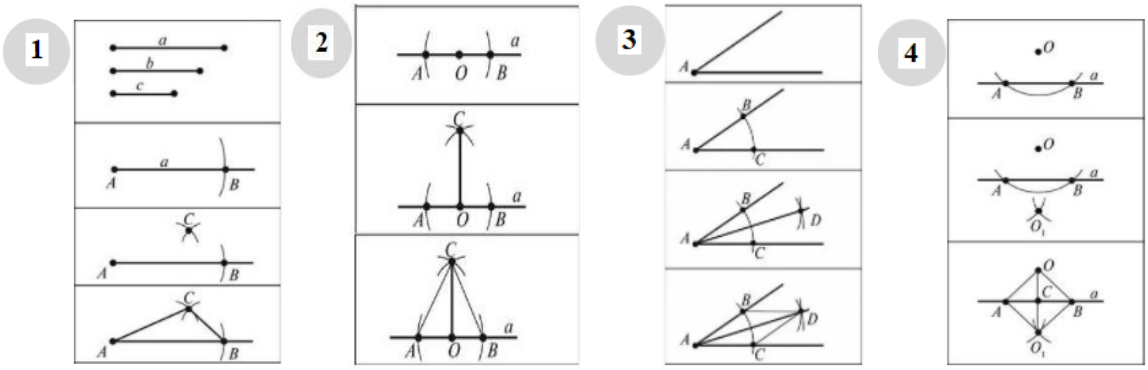
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка? 
А2	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 18, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
А3	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння сторін та діагоналей квадрату.

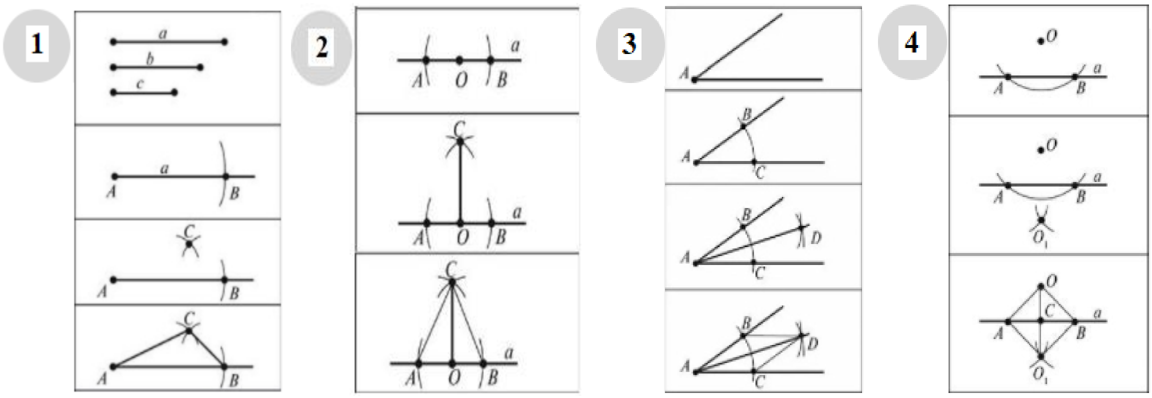
БЛОК В

В1	Відстань між населеними пунктами А та В становить 520 км, а від них до залізниці 240 км та 440 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.
В3	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(2;-7)$ і $B(-8;3)$, якщо центр його лежить на прямий $y = -0{,}25x - 4$.
В4	На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову $BD : DA = 3:1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.

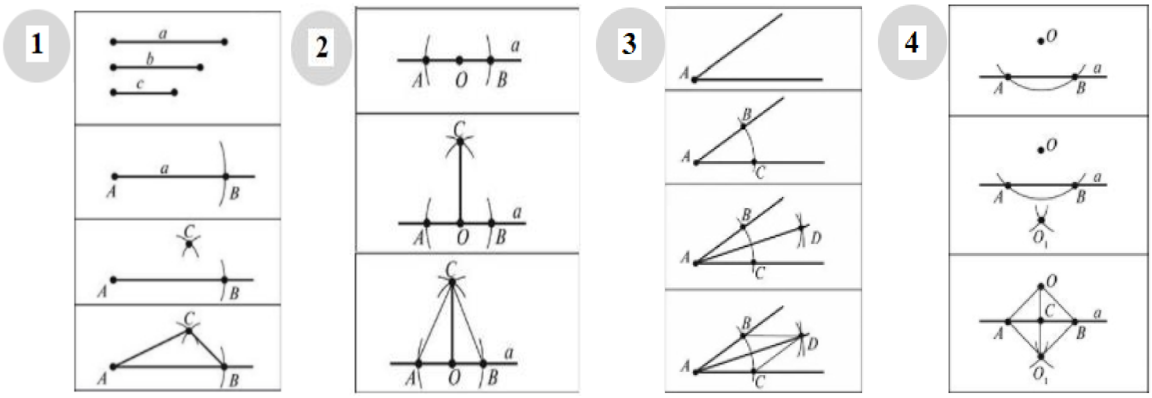
ВАРІАНТ 23	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
А2	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2+12x+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{15}=1$.
А3	Дан квадрат із стороною *a*. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння сторін, діагоналей та кола, описаного навколо квадрату.
БЛОК В	
В1	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за катетом та гіпотенузою.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+2y^2+8x-4=0$.
В4	Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

ВАРІАНТ 24	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь АD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Відповіді: 1. В А Г Д Б 2. В Г Д А Б 3. Б В Г А Д 4. Г Д В А Б
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його медіан.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в півтора рази більша за відстань до точки М (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати бісектрису даного кута.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2+8x+10y-8=0$.
В4	Довести, векторним методом властивості середньої лінії трапеції.

<table>
<tr><td colspan="2">ВАРІАНТ 25</td></tr>
<tr><td colspan="2">БЛОК А</td></tr>
<tr><td>А1</td><td>На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка?
</td></tr>
<tr><td>А2</td><td>Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, вписаного у квадрат.</td></tr>
<tr><td>А3</td><td>Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\sqrt{2})$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">БЛОК В</td></tr>
<tr><td>В1</td><td>Відстань між населеними пунктами А та В становить 130 км, а від них до залізниці 60 км та 110 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.</td></tr>
<tr><td>В2</td><td>З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки трикутник за трьома сторонами.</td></tr>
<tr><td>В3</td><td>Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ і $x^2+y^2+4y-32=0$.</td></tr>
<tr><td>В4</td><td>На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову $BD : DA = 3:1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів:
$CB = a$, $CA = b$.</td></tr>
</table>

ВАРІАНТ 26	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови перпендикуляра до прямої через точку, що не лежить на даній прямій? 
А2	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, середин його сторін.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки А(6;0) в три рази більша за відстань до точки В (2/3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.
В2	Точки *M* и *N* лежать відповідно на сторонах *AD* і *BC* чотирикутника *ABCD*, причому *AM* : *MD* = *BN* : *NC* = 3 : 4. Доведіть, що середини відрізків *AB, MN* и *CD* лежать на одній прямій.
В3	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки *A*(-8;3) і *B*(2;-7), якщо центр його лежить на прямий $x + 4y + 16 = 0$.
В4	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.

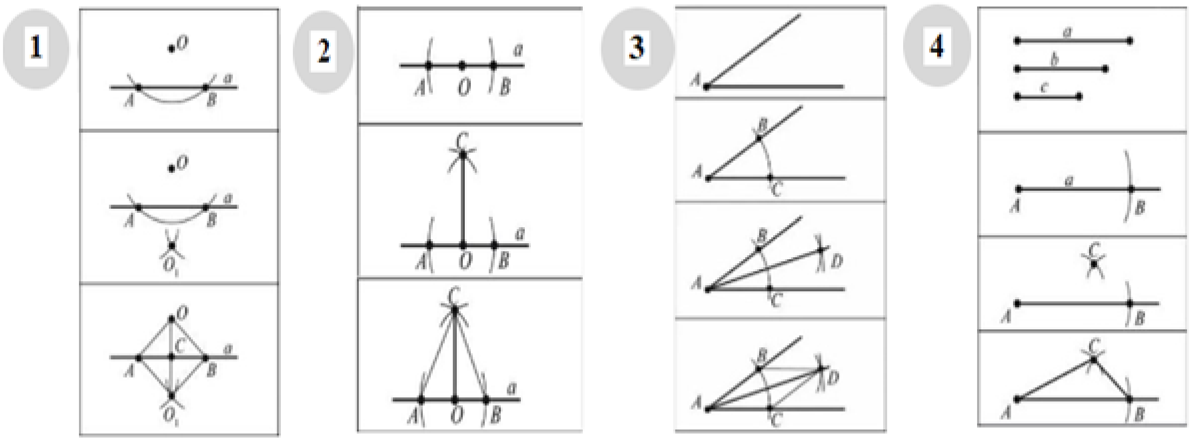
ВАРІАНТ 27	
БЛОК А	
А1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. Г Д В А Б 2. В А Г Д Б 3. В Г Д А Б 4. Б В Г А Д
А2	Дан квадрат із стороною a. Оберіть систему координат таким чином, щоб всі вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, точки перетину діагоналей, рівняння кола, описаного навколо квадрату.
А3	Знайдіть кут між прямими, які проходять через центр кола $x^2+y^2-4x-16y+32=0$ і через фокуси еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$.
БЛОК В	
В1	Матеріальна точка рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки N (-1;0) в два рази більша за відстань до точки М (3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати прямокутний трикутних за двома катетами.
В3	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.
В4	Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.

ВАРІАНТ 28	
БЛОК А	
А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови бісектриси даного кута? 
А2	Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ і через центр еліпсу $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$.
А3	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння його сторін та медіан та рівняння кола, описано навколо трикутника.
БЛОК В	
В1	Визначте геометричне місце точок із загальної форми рівняння $x^2+2y^2-12y-6=0$.
В2	З використанням ППЗ GRAN за допомогою циркуля та лінійки побудувати трикутник за стороною та двома прилеглими кутами.
В3	На відстані 1км від газопроводу треба побудувати газопровідну станцію, з якої газ надходить до населених пунктів А та В, відстань між якими 13 км. Відстань від населених пунктів А та В до газопроводу становить 4км і 9 км відповідно. Визначить, де треба побудувати газопровідну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
В4	Довести, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний її основам.

ВАРІАНТ 29	
БЛОК А	
A1	Вказати правильну послідовність кроків при побудові циркулем і лінійкою бісектриси кута А. А) Позначаємо точки В і С перетину кола із сторонами кута. Б) Проводимо промінь AD. В) Проводимо коло довільного радіуса з центром в точці А. Г) Проводимо два кола з центрами в точках В і С однаковим радіусом. Д) Позначаємо точку перетину кіл D. Варіанти відповіді: 1. Г Д В А Б 2. В А Г Д Б 3. В Г Д А Б 4. Б В Г А Д
A2	Для прямокутного трикутника з катетами a і b оберіть систему координат таким чином, щоб початок координат знаходився у вершині прямого кута, а дві інші – на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника, рівняння медіан та координати їх точки перетину.
A3	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 18, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$.
БЛОК В	
B1	Відстань між населеними пунктами А та В становить 260 км, а від них до залізниці 120 км та 220 км відповідно. Визначить, де треба побудувати залізничну станцію, однаково віддалену від пунктів А та В.
B2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізку.
B3	Знайдіть рівняння прямої, що проходить через центри кривих $x^2 + 2y^2 + 16y - 4 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$.
B4	Точки *M* и *N* лежать відповідно на сторонах *AD* і *BC* чотирикутника *ABCD*, причому *AM* : *MD* = *BN* : *NC* = 3 : 4. Доведіть, що середини відрізків *AB*, *MN* и *CD* лежать на одній прямій.

ВАРІАНТ 30

БЛОК А

А1	На якому з рисунків зображено основні етапи побудови середини заданого відрізка? 
А2	Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі *Ox*, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
А3	Дан квадрат із стороною *a*. Оберіть систему координат таким чином, щоб три його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати його вершин, рівняння кола, описаного навколо квадрату.

БЛОК В

В1	Матеріальна точка М рухається таким чином, що в будь-який момент часу її відстань до точки *C*(6;0) в три рази більша за відстань до точки *A*(2/3;0). Знайдіть рівняння траєкторії руху матеріальної точки М.
В2	З використанням ППЗ GRAN-2D побудувати за допомогою циркуля та лінійки бісектрису даного кута.
В3	Точки *M* и *N* лежать відповідно на сторонах *AD* і *BC* чотирикутника *ABCD*, причому *AM* : *MD* = *BN* : *NC* = 3 : 4. Доведіть, що середини відрізків *AB*, *MN* и *CD* лежать на одній прямій.
В4	Складіть рівняння кола, яке проходить через точки *A*(-8;3) і *B*(2;-7), якщо центр його лежить на прямий $y = -0{,}25x - 4$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Практикум з методики навчання математики. Основна ш кола: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця - К .: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. - 267 с.

2. Грохольська А. Декартові координата на площині та в просторі на кодопозитивах /У Математика в школі. - 2006. - № 2. - С. 17-23.

3. Крайзман М. Л. Розв’язування геометричних задач методом координат: посібник для самоосвіти вчителів. - К .: Рад, школа, 1983. - 127с.

4. Бевз Г. П. Обобщения при решении задач с помощью векторов // Математика в школе. - 1978. - № 2. - С. 47-50.

5. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. Спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

6. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Сайт Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/(iew_pr/math.doc

7. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк; наук. ред. академік АПН України, д. пед. н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 324 с.

8. Кононова О. Використання евристичних прийомів під час розв’язування позиційних задач на побудову із застосуванням інформаційних технологій // Математика в школі. – 2008. – №3. – с. 29-37.

9. Кононова О.О. Організація дослідницької діяльності учнів в розв’язанні задач на побудову із застосуванням інформаційних технологій // Вісник ЛНУ імені Тараса Шевченка № 15(178), 2009.

10. Полонський, В.Б. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії [Текст] / В.Б. Полянський, Ю.М. Рабинович, М.С. Якір. - Тернопіль: Підручники й посібники, 2009.

11. Ясінський В.А. Геометричні задачі: Готуємося до математичної олімпіади.-Львів: Каменяр, 2003.-76 с.

12. Філіпповський Г.Б. Чудові обмеження в задачах на побудову / Г.Б. Філіпповський. – Харків: Видавнича група «Основа», 2011. – 141с.

ДОДАТОК А

Властивості катетів, медіан і висот прямокутного трикутника

Катет прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою й проекцією цього катета на гіпотенузу

$$a = \sqrt{a_c c}; \quad b = \sqrt{b_c c}\ .$$

Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнє пропорційне між проекціями катетів на гіпотенузу

$$h_c = \sqrt{a_c b_c}\ .$$

Висота може бути визначена через катети та їх проекції на гіпотенузу

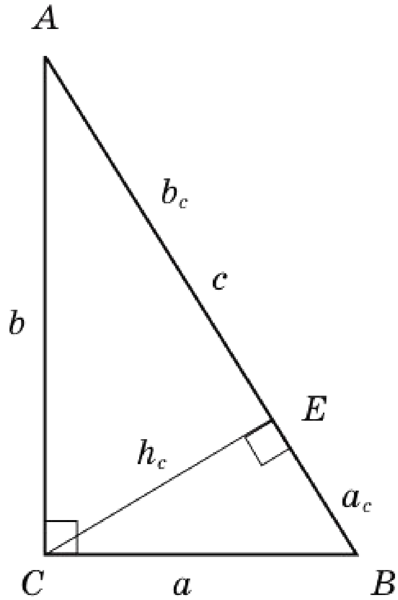
$$h_c = \frac{ab}{a_c + b_c}\ .$$

Медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи

$$m_c = \frac{1}{2}c\ .$$

Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, ділить його на два трикутники, подібні до даного

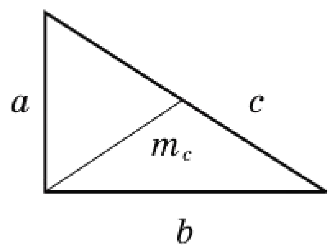
$$\Delta ABE \backsim \Delta AEC \backsim \Delta ABC$$

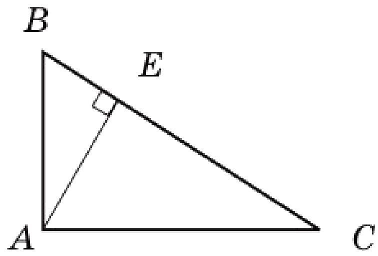


$a_c = EB;$

$b_c = AE;$

$a_c + b_c = c$





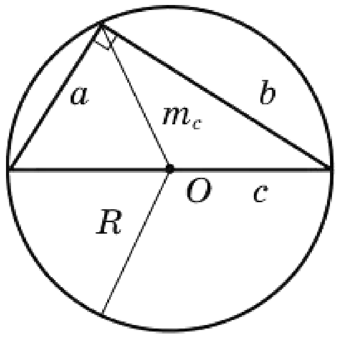
ДОДАТОК Б

Коло, описане навколо прямокутного трикутника

Центр описаного кола збігається з серединою гіпотенузи.

Радіус описаного кола

$$R = \frac{c}{2} = m_c$$



Площа прямокутного трикутника

Площу можна визначити:

— через катети

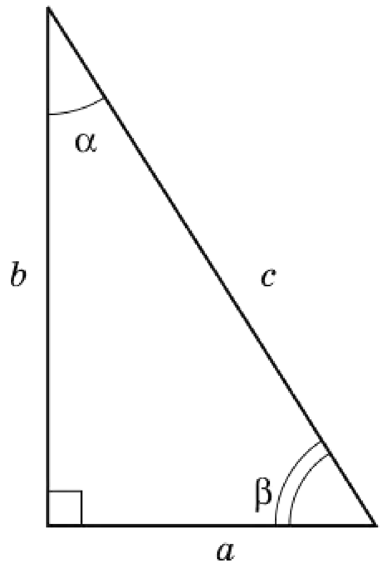
$$S = \frac{1}{2} ab;$$

— через катет і гострий кут

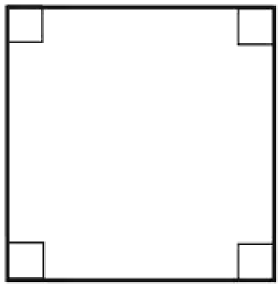
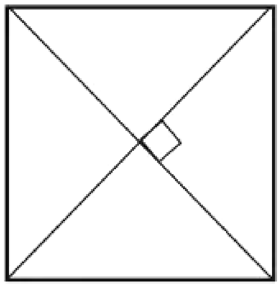
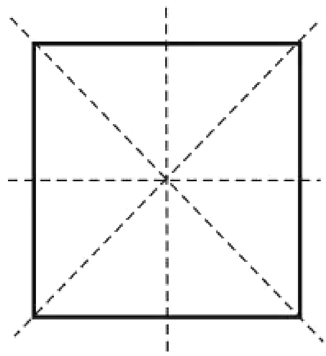
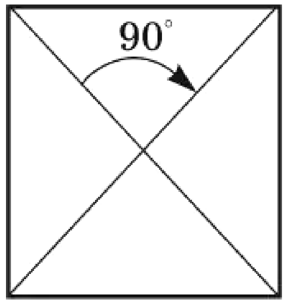
$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

— через гіпотенузу і гострий кут

$$S = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\beta$$



ДОДАТОК В

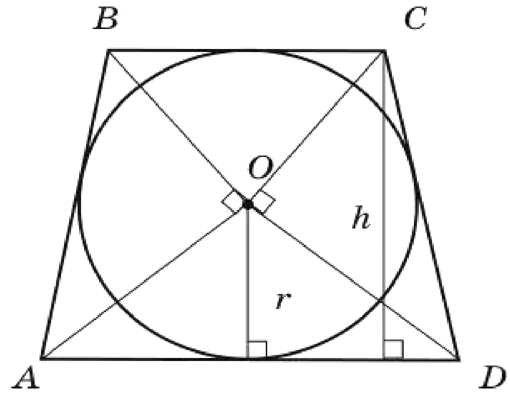
Властивості квадрата	
У квадрата всі кути прямі	
Діагоналі квадрата рівні і перетинаються під прямим кутом	
Квадрат має чотири осі симетрії — прямі, що проходять: — через його діагоналі; — через середини протилежних сторін	
Квадрат має поворотну симетрію. Центр симетрії — точка перетину діагоналей, кут повертання 90°	

ДОДАТОК Г

Властивості трапеції

Коло можна вписати у трапецію, якщо сума її бічних сторін дорівнює сумі основ

$$AB + CD = BC + AD$$



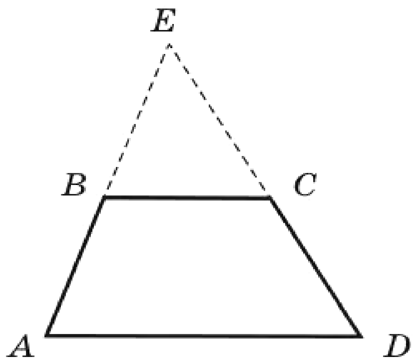
Центр вписаного у трапецію кола — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів.

Радіус вписаного кола дорівнює половині висоти

$$r = \frac{h}{2}$$

При продовженні бічних сторін трапеції утворюються два подібних трикутники

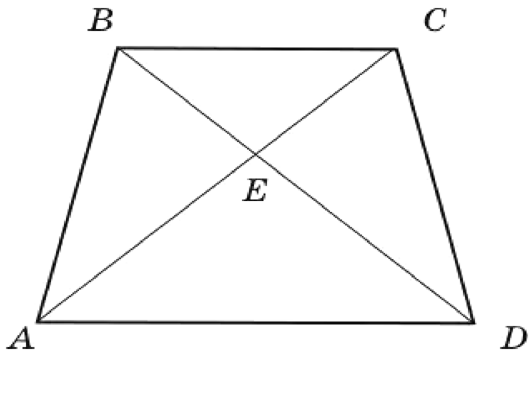
$$\Delta BEC \backsim \Delta AED$$



Трикутники, утворені основами і відрізками діагоналей,— подібні. Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню основ

$$\Delta BEC \backsim \Delta DEA;$$

$$k = \frac{BC}{AD}$$

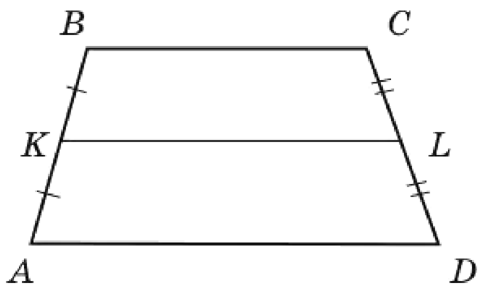


ДОДАТОК Д

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі

$$KL \parallel BC;\ KL \parallel AD;$$

$$KL = \frac{BC + AD}{2}$$



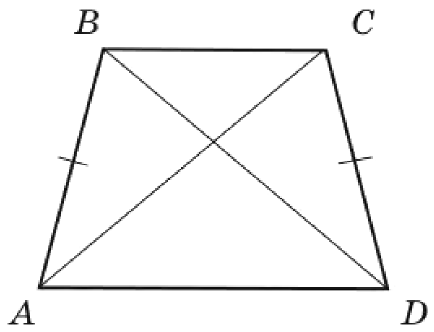
У рівнобічній трапеції:

— кути при основі рівні,

$\angle A = \angle D;\quad \angle B = \angle C;$

— діагоналі рівні

$$BD = CA$$



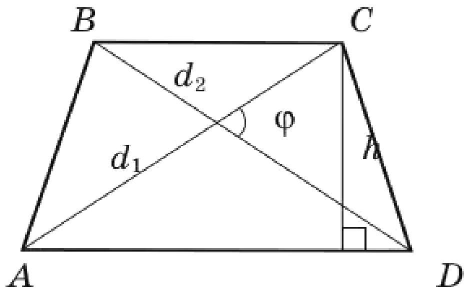
Площу трапеції можна визначити:

— через півсуму основ (середню лінію трапеції) і висоту

$$S = \frac{a + b}{2}\, h;$$

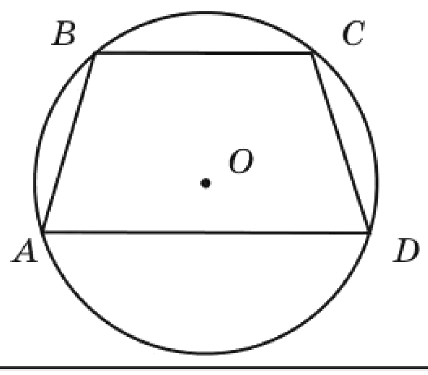
— через діагоналі і кут між ними

$$S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \sin \varphi$$



Навколо будь–якої рівнобічної трапеції можна описати коло.

Якщо трапеція вписана у коло, то вона рівнобічна



Навчальне видання

ГРУДКІНА Наталія Сергіївна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни
«Додаткові розділи елементарної математики»
для студентів спеціальності
014 «Середня освіта (Математика)»

Редагування, комп'ютерне верстання І. І. Дьякова

160/2019. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк. 2,67.
Обл.-вид. арк. 1,12. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003